

531
с90

Суслов

Основы аналитич.
механики

2852



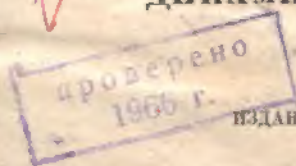
9
531
C-90

G. SOUSLOW,
professeur à l'Université de Kieff.
Traité de mécanique rationnelle.

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Г. К. СУСЛОВА,
профессора университета Св. Владимира.

Томъ I.
ЧАСТЬ ВТОРАЯ.
ДИНАМИКА ТОЧКИ.



ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ.



Генеральный
Институт в Киев

ИЗДАНИЕ КНИГОПРОДАВЦА Н. Я. ОГЛОБЛИНА
Кіевъ, Брешатикъ № 83. || С.-Петербургъ, Екатерин. № 4.
Кіевъ. 1911.

W. H. H. H.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION

1897



THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION

1897

Вторая часть первого тома моихъ „Основъ аналитической механики“ издана въ той же формѣ, какъ и первая. Содержаніе второй части составляетъ динамика точки; третья часть, въ которую войдутъ геометрія массъ, общія положенія динамики системы и статика, появится въ свѣтъ въ самомъ непродолжительномъ времени.

Проф. Г. Суслевъ.

Кіевъ. Мартъ 1911.



ОГЛАВЛЕНІЕ.

§§		Стр.
Вступленіе		III
Оглавленіе		V

ДИНАМИКА.

ГЛАВА VIII.

Основные законы движенія (*Axiomata sive leges motus*).

85. Матерія. Масса. Плотность	1
86. Количество движенія тѣла. Измѣненіе движенія (<i>mutatio motus</i>).	2
87. Сила	3
88. Первый законъ Ньютона	3
89. Второй законъ Ньютона. Законъ параллелограмма силъ	4
90. Третій законъ Ньютона или законъ дѣйствія и противодѣйствія.	6
91. Движеніе массы относительно другой массы	8

ДИНАМИКА ТОЧКИ.

ГЛАВА IX.

Матеріальная точка. Дифференціальныя уравненія движенія точки. Ихъ интегралы.

92. Матеріальная точка	10
93. Дифференціальныя уравненія движенія матеріальной точки	11
94. Интегралы движенія	13

ГЛАВА X.

Прямолинейное движеніе свободной матеріальной точки.

95. Условія, при которыхъ свободная матеріальная точка движется прямолинейно	17
96. Прямолинейное движеніе подъ дѣйствіемъ силы, зависящей лишь отъ времени	18
97. Прямолинейное движеніе подъ дѣйствіемъ силы, зависящей лишь отъ положенія точки	19

98.	Прямолинейное движение под действием силы, зависящей лишь от скорости	24
-----	---	----

ГЛАВА XI.

Простейшие случаи прямолинейного движения свободной материальной точки.

99.	Криволинейное движение точки, сводящееся на задачу о нескольких прямолинейных движениях отдельных точек	31
100.	Криволинейное движение тяжелой точки	31
101.	Притяжение точки неподвижным центром прямопропорционально расстоянию	33
102.	Отталкивание точки неподвижным центром прямопропорционально расстоянию	35

ГЛАВА XII.

Закон моментов количества движения. Закон живой силы.

103.	Закон моментов количества движения материальной точки	36
104.	Секторальная скорость материальной точки вокруг оси	37
105.	Интеграл площадей	38
106.	Два интеграла площадей	38
107.	Три интеграла площадей	39
108.	Закон живой силы	40
109.	Интеграл живой силы. Функция силового. Функция потенциальная.	42
110.	Силы, имеющие своим источником неподвижные центры и зависящие от расстояния	43
111.	Функция точки. Поверхности уровня. Дифференциальный параметр первого порядка или градиент	45
112.	Теорема лорда Кельвина	47
113.	Производная от функции точки по данному направлению	48
114.	Свойства силовой функции, как функции точки	49

ГЛАВА XIII.

Центральные орбиты.

115.	Движение точки под действием центральной силы, функции расстояния	53
116.	Движение под действием притяжения по Ньютонову закону	55
117.	Формула Бине	62

ГЛАВА XIV.

Дифференциальные уравнения движения несвободной точки.

118.	Кинематические связи удерживающие и неудерживающие	64
119.	Условие, налагаемое на скорость несвободной точки удерживающей связью	67

120.	Условие, налагаемое на ускорение несвободной точки удерживающею связью	69
121.	Условия, налагаемые на скорость и ускорение несвободной точки неудерживающею связью	70
122.	Реакція удерживающей связи. Связи идеальныя. Множитель связи	72
123.	Дифференциальные уравнения движения точки, находящейся на идеальной удерживающей связи	75
124.	Реакція неудерживающей связи. Дифференциальные уравнения движения точки, подчиненной неудерживающей связи	77
125.	Дифференциальные уравнения движения точки, подчиненной двум связям	79

ГЛАВА XV.

Движеніе точки по поверхности.

126.	Дифференциальные уравнения движения точки по поверхности	83
127.	Интегралъ площадей	88
128.	Интегралъ живой силы	89
129.	Коническій маятникъ	90
130.	Движеніе по инерціи	94
131.	Движеніе по конусу вращенія	94

ГЛАВА XVI.

Движеніе точки по кривой.

132.	Дифференциальные уравнения движения точки по кривой	98
133.	Интегралъ живой силы	101
134.	Движеніе тяжелой точки по циклоидѣ	102
135.	Элементарныя свойства эллиптическихъ интеграловъ и функций	105
136.	Математическій маятникъ	107

ГЛАВА XVII.

Движеніе точки по связи съ треніемъ.

137.	Законы тренія	116
138.	Дифференциальные уравнения движения точки по шероховатой поверхности	117
139.	Движеніе тяжелой точки по шероховатой наклонной плоскости	118
140.	Движеніе точки по шероховатой поверхности по инерціи	122
141.	Дифференциальные уравнения движения точки по шероховатой кривой	122
142.	Движеніе тяжелой точки по вертикальной шероховатой циклоидѣ	123

ГЛАВА XVIII.

Относительное движеніе матеріальной точки.

143.	Дифференциальные уравнения относительнаго движения матеріальной точки	126
------	---	-----

144	Интеграль производный отъ интеграла живой силы . . .	128
145	Движеніи тѣлеса точки по отношенію къ вращающейся землѣ .	129
146	Матрица Фуко	135

ГЛАВА XIX.

Мгновенныя силы. Ударъ точки о связь.

147.	Импульсъ силы	139
148.	Теорема лорда Кельвина	141
149.	Мгновенныя силы	142
150.	Ударъ матеріальной точки о связь	145
151.	Измѣненіе живой силы точки за время удара	154

ДИНАМИКА.

ГЛАВА VIII.

Основные законы движенія.

(Axiomata sive leges motus).

85. Матерія. Масса. Плотность. Въ Кинематикѣ мы говорили о движеніи геометрическихъ объектовъ, теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію движенія вещественныхъ или материальныхъ тѣлъ. Матерія — понятие первоначальное и дальнѣйшему опредѣленію не подлежитъ; мы можемъ только описательно изложить качества матеріи. Прежде всего матерія представляетъ собою величину неизмѣримую. Другими словами, количество матеріи въ какомъ либо тѣлѣ можетъ быть выражено числомъ. Затѣмъ матерія протяжена, т. е. занимаетъ нѣкоторый объемъ, имѣетъ длину, ширину и высоту. Далѣе она обладаетъ способностью двигаться. Поэтому, если часть матеріи исчезла изъ какого либо объема, то мы всегда можемъ допустить, что она перемѣстилась въ другое мѣсто, и никогда не имѣемъ достаточно данныхъ для утвержденія, что она уничтожилась, — отсюда заключаемъ о неразрушимости матеріи и о постоянствѣ ея количества въ мірѣ. Въ объемъ, сплошь заполненный матеріей, не можетъ быть помѣщено новое количество матеріи, — это свойство носить названіе непроницаемости.

Количество матеріи въ какомъ либо тѣлѣ называется его массою. За единицу массы принимается граммъ, одна тысячная часть массы эталона, хранящагося въ Парижѣ. При изготовленіи эталона *) „килограмма“ имѣли въ виду сдѣлать массу его

*) Le kilogramme prototype des Archives.

равною массѣ кубическаго дециметра воды при 4° Цельзія, но позднѣйшія измѣренія обнаружили, что эта цѣль не была достигнута: масса куб. дец. воды вѣситъ 1000,013 грамма.

Количество матеріи, заключенное въ единицѣ объема какого-нибудь тѣла, называется среднею плотностью тѣла. Всѣ тѣла измѣняютъ свой объемъ съ измѣненіемъ температуры; отсюда вытекаетъ, что видимый объемъ тѣла не сплошь заполненъ матеріей (тѣла скважины), а потому, если въ различныхъ частяхъ какого-либо тѣла вырѣзать одинаковые объемы, то, вообще говоря, массы въ этихъ объемахъ будутъ различны. Возьмемъ какую-либо точку A внутри объема, занятого тѣломъ, и построимъ замкнутую поверхность S такъ, чтобы A лежалъ на этой поверхности или внутри ея. Пусть объемъ, ограниченный поверхностью S , будетъ Δv , а масса, заключенная въ этомъ объемѣ, Δm . Разсмотримъ предѣлъ отношенія $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ въ томъ предположеніи, что поверхность S стягивается въ точку A . Если этотъ предѣлъ σ существуетъ, то онъ называется плотностью тѣла въ точкѣ A :

$$\sigma = \text{Пред.} \left\{ \frac{\Delta m}{\Delta v} \right\}_{\Delta v \rightarrow 0}.$$

Количество σ , вообще говоря, функція координатъ точки A ; если для всѣхъ точекъ внутри тѣла σ равно одному и тому же постоянному, то тѣло называется однороднымъ. Единица плотности сложная; она зависитъ отъ единицъ массы и длины. Символомъ можно эту единицу изобразить такъ:

$$\text{ед. плотности} = \frac{\text{граммъ}}{(\text{сант.})^3}.$$

86. Количество движенія тѣла. Измѣненіе движенія (*mutatio motus*). Въ геометрическомъ смыслѣ матеріальное тѣло мы можемъ разсматривать какъ трехмѣрную деформирующуюся среду (§ 38). Поэтому движеніе данной массы можетъ быть крайне разнообразно. Въ настоящей главѣ мы будемъ говорить исключительно о простѣйшемъ возможномъ движеніи массы, а именно о томъ, когда масса движется поступательно (§ 58), подобно твердому тѣлу. Тогда всѣ точки массы имѣютъ одновременно одну и ту же скорость, одно и то же ускореніе. Общія всѣмъ точкамъ массы скорость и ускореніе мы будемъ въ дальнѣйшемъ называть для краткости скоростью массы, ускореніе массы.

Пусть тѣло движется поступательно со скоростью v . Если масса тѣла m , то произведение mv называется количествомъ движенія тѣла. Количество движенія—векторъ, совпадающій по направленію со скоростью.

Геометрическая производная по времени отъ количества движенія носитъ названіе измѣненія движенія (*mutatio motus*, по Ньютону). Эта производная по величинѣ, очевидно, равняется произведенію изъ массы на ускореніе, а по направленію совпадаетъ съ ускореніемъ (§ 4, § 49).

Единицы количества движенія и измѣненія движенія такимъ образомъ зависятъ отъ основныхъ единицъ массы, длины и времени:

$$\text{ед. кол. движ.} = (\text{ед. массы}) \cdot (\text{ед. скор.}) = \frac{(\text{граммъ}) (\text{сант.})}{\text{сек. сред. врем.}};$$

$$\text{ед. измѣн. дв.} = (\text{ед. массы}) \cdot (\text{ед. ускор.}) = \frac{(\text{граммъ}) (\text{сант.})}{(\text{сек. сред. врем.})^2}.$$

87. Сила. Одно и то же тѣло можетъ двигаться самымъ разнообразнымъ способомъ. Поэтому известный характеръ движенія тѣла считается случайнымъ качествомъ тѣла, зависящимъ не отъ самого тѣла, а отъ вѣншихъ условій. Эти вѣнныя условія, заставляющія массу измѣнить свое движеніе, мы называемъ силами. Въвести силы въ анализъ мы можемъ не иначе, какъ съ помощью ряда заранее сдѣланныхъ условій или опредѣленій. Наиболее просто и строго изложены эти основныя опредѣленія подъ названіемъ *axiomatica sive leges motus* Ньютономъ въ его „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ (1687 г.). Всякія позитивныя попытки реформировать или измѣнить Ньютонovy положенія не могутъ быть признаны удачными. Поэтому въ дѣлѣишемъ мы будемъ держаться, какъ можно ближе, Ньютону, пользуясь лишь при изложеніи болѣе употребительными теперь терминами.

88. Первый законъ Ньютона. Прежде всего необходимо условиться о томъ признакѣ, по которому мы узнаемъ, что сила дѣйствуетъ на данную массу, или, какъ говорятъ, сила приложена къ данной массѣ. Простейшимъ изъ движеній тѣла, безспорно, является движеніе прямолинейное и равномерное; скорость такого движенія постоянна по величинѣ и направленію, слѣд., ускореніе равно нулю. Частнымъ случаемъ равномернаго движенія будетъ покои массы. Мы принимаемъ, что движеніе такого рода масса совершаетъ сама по себѣ, безъ дѣйствія на нее силы, а именно, если масса совершаетъ движеніе со скоростью переменною по величинѣ или направленію, т. е. движеніе съ ускореніемъ,

отличнымъ отъ нуля, то не иначе, какъ отъ дѣйствія на нее вѣкоторой силы. Другими словами, дѣйствіе силы на массу обнаруживается существованіемъ ускоренія въ движеніи массы. Сдѣлаемъ нами условіе или опредѣленіе носить названіе перваго закона Ньютона или закона инерціи. Подъ инерціей разумѣется неспособность матеріи самой по себѣ измѣнять свою скорость.

У Ньютона первый законъ изложенъ такъ:

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Всякое тѣло сохраняетъ свое состояніе покоя или прямолинейнаго и равномернаго движенія, если только приложенныя къ нему силы не побуждаютъ его измѣнить свое состояніе.

89. Второй законъ Ньютона. Законъ параллелограмма силъ. Первый законъ Ньютона даетъ намъ возможность обнаружить, приложена ли къ данной массѣ сила или нѣтъ: если масса движется съ ускореніемъ, сила приложена; если нѣтъ ускоренія, нѣтъ и силы. Посмотримъ теперь, какъ сравнить между собою величины двухъ силъ. Силы могутъ отличаться одна отъ другой во первыхъ тѣмъ, что онѣ приложены къ различнымъ массамъ; во вторыхъ тѣмъ, что онѣ сообщаютъ массамъ различныя ускоренія. Двѣ силы, сообщающія равнымъ массамъ равныя ускоренія, мы признаемъ равными, такъ какъ для различенія ихъ не имѣемъ основанія.

Положимъ, что вѣкоторая масса m имѣетъ въ разсматриваемый моментъ ускореніе g . Раздѣлимъ эту массу на n равныхъ частей, и пусть каждая изъ нихъ будетъ m_1 , такъ что $m = nm_1$. Тогда про одно и то же явленіе—движеніе массы m съ ускореніемъ g , мы можемъ сказать, или, что къ массѣ m приложена сила f , сообщающая ей ускореніе g , или, что къ n массамъ m_1 приложены n равныхъ между собою силъ f_1 , сообщающихъ каждой массѣ m_1 то же ускореніе g . Отсюда естественно принять, что сила f въ n разъ больше силы f_1 , или,

$$\frac{f}{f_1} = \frac{m}{m_1}, \quad (1)$$

т. е. силы, сообщающія различнымъ массамъ равныя ускоренія, прямопропорціональны массамъ.

Ускореніе массы представляетъ собою векторъ; слѣд., мы можемъ разсматривать это ускореніе, какъ геометрическую сумму двухъ или болѣе векторовъ, и въ этомъ смыслѣ условно можемъ говорить (§ 84), что данная масса имѣетъ, вмѣсто одного, одновременно два, три или болѣе ускореній. Распространимъ то же условіе и на силы, т. е. примемъ, что на массу могутъ одновременно

дѣйствовать нѣсколько силъ, при чемъ только ускоренія, сообщаемыя массой этими силами, должны въ геометрической суммѣ давать ускореніе массы.

Положимъ, что одна и та же масса m отъ двухъ силъ f_1 и f_2 получаетъ различныя ускоренія g_1 и g_2 , и пусть $g_2 = ng_1$. Тогда, по предыдущему, мы можемъ представить себѣ, что во второмъ случаѣ на массу m дѣйствуетъ не одна сила f_2 , а n равныхъ между собою силъ f , сообщающихъ каждая ускореніе g_1 . Силы f и f_1 мы считаемъ равными, такъ какъ онѣ равнымъ массамъ сообщаютъ равныя ускоренія. Отсюда принимаемъ, что $f_2 = nf_1$, или

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2}, \quad (2)$$

т. е. силы, сообщающія равнымъ массамъ различныя ускоренія, пропорціональны этимъ ускореніямъ.

Сравнимъ теперь двѣ силы f и f_1 , сообщающія массамъ m и m_1 соответственно ускоренія g и g_1 . Разсмотримъ еще третью силу f_0 , сообщающую массѣ m_1 ускореніе g . Тогда по (1) сравненіе силъ f_0 и f даетъ:

$$\frac{f}{f_0} = \frac{m}{m_1};$$

съ другой стороны по (2):

$$\frac{f_0}{f_1} = \frac{g}{g_1}.$$

Перемножая эти равенства, получимъ

$$\frac{f}{f_1} = \frac{mg}{m_1 g_1}, \quad (3)$$

т. е. силы, сообщающія различнымъ массамъ различныя ускоренія, относятся между собою, какъ произведеніи соответственныхъ массъ на ускоренія.

Ускореніе, результатъ дѣйствія силы на массу, представляетъ векторъ; поэтому мы принимаемъ, что и сила также можетъ быть изображена векторомъ, совпадающимъ по направленію съ ускореніемъ, но по (3) пропорціональнымъ произведенію изъ массы на ускореніе. Сдѣланное нами раньше условіе о совмѣстномъ дѣйствіи нѣсколькихъ силъ на данную массу можемъ теперь формулировать такъ: если масса движется съ ускореніемъ, то можно считать безразлично, что на нее дѣйствуетъ одна сила или совмѣстно

нѣсколько силъ, если только геометрическая сумма послѣднихъ равна предъидущей силѣ.

Геометрическая сумма нѣсколькихъ силъ, приложенныхъ къ одной и той же массѣ, носить названіе равнодѣйствующей силы.

Когда за единицу силъ принята сила, которая единицѣ массы (грамму) сообщаетъ единицу ускоренія (сантиметръ въ секунду на секунду), то по (3) найдемъ

$$F = m a,$$

т. е. величина силы выразится, какъ произведеніе чиселъ, представляющихъ собою величины массы и ускоренія. Въ этомъ случаѣ единица силы носить названіе динъ и представится такимъ символомъ:

$$(\text{дина}) = \frac{(\text{граммъ}) \cdot (\text{сантим.})}{(\text{сек. ср. вр.})^2}.$$

Изъ всего сказаннаго вытекаетъ, что сила характеризуется 1) мѣстомъ приложения, 2) своею величиною и 3) своимъ направленіемъ.

Сдѣланныя нами условія о величинѣ, направленіи и совмѣстномъ дѣйствіи силъ изложены Ньютономъ въ его второмъ законѣ и примѣчаніи (corollarium) къ этому закону.

Второй законъ говоритъ:

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Измѣненіе движенія (§ 86) пропорціонально приложенной силѣ и происходитъ въ направленіи силы.

Въ примѣчаніи къ этому закону говорится о совмѣстномъ дѣйствіи силы.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere quo latera separatim.

Отъ совокупнаго дѣйствія (двухъ) силъ тѣло описываетъ диагональ параллелограмма въ теченіе того же времени, какъ и стороны его при дѣйствіи силъ порознь.

Условіе о совмѣстномъ дѣйствіи силъ обыкновенно называется закономъ параллелограмма силъ.

90. Третій законъ Ньютона или законъ дѣйствія и противодѣйствія. Первый законъ Ньютона учить насъ, какъ узнать, приложена ли сила къ тѣлу, второй указываетъ величину и направленіе силы. Но всетаки эти два закона не даютъ полнаго и законченнаго опредѣленія силы: съ одной стороны остается безъ отвѣта вопросъ, какая причина тому, что сила дѣйствуетъ на массу, а

съ другой, по закону параллелограмма, мы можем предполагать безразлично, что на тѣло дѣйствуютъ одна или много силъ, лишь бы всѣ эти силы имѣли одну и ту же равнодѣйствующую, и пока не имѣемъ основаній остановиться на какъ-й либо изъ возможныхъ въ безконечномъ числѣ комбинацій. Выходъ изъ этой неопредѣленности, а вмѣстѣ съ тѣмъ и разрѣшеніе вышеупомянутого вопроса о причинѣ или источникѣ силы, и дается третьимъ закономъ Ньютона или закономъ о дѣйствіи и противодѣйствіи.

Искать причину измѣненія скорости какой либо массы мы можемъ лишь въ томъ, что около движущейся массы находятся еще и другія массы. Если бы разсматриваемая масса была одна, была вполнѣ изолирована въ мірѣ, то мы не имѣли бы никакихъ основаній допускать, что движеніе ея измѣняется. Даже само движеніе не имѣло бы тогда никакого физическаго значенія; конечно, можно было бы вообразить безчисленное множество гипотетическихъ средъ, въ которыхъ двигалась бы разсматриваемая масса, и любое изъ такихъ движеній было бы геометрическимъ построениемъ, а не физическимъ явлениемъ. Явлениемъ физическимъ можетъ быть лишь движеніе тѣла относительно другого тѣла, т. е. движеніе среды, геометрически связанной съ одной массой, въ средѣ, геометрически зависящей отъ другой. Но, когда у насъ имѣются хотя бы двѣ массы, то уже мыслимо, что различіе въ ихъ взаимномъ положеніи можетъ вліять на движеніе массъ другъ относительно друга. Поэтому законъ объ источникѣ силъ долженъ быть таковъ, чтобы уже и для двухъ массъ онъ давалъ вполнѣ законченный результатъ.

Мы принимаемъ, что источникомъ силы F , дѣйствующей на массу M , служить такая масса M_1 , на которую дѣйствуетъ сила F_1 , равная, но прямопротивоположная силѣ F .

Если силу F называемъ дѣйствіемъ, а силу F_1 противо-дѣйствіемъ, то можемъ сказать, что всякому дѣйствію соответствуетъ равное и прямопротивоположное ему противодѣйствіе.

Сдѣланное условіе, очевидно, выполнить высказанное раньше требованіе, чтобы и для двухъ массъ не осталось ничего неопредѣленного: источникомъ для силы F_1 , по тому же правилу, окажется масса M и, слѣд., система силъ F и F_1 вполнѣ опредѣленная и замкнутая.

Теперь уже ясна необходимость закона параллелограмма и всякая неопредѣленность исчезаетъ: тѣ силы дѣйствуютъ на массу, для которыхъ мы можемъ указать источникъ. Если извѣстна причина для одной силы, то и приложена на самомъ дѣлѣ къ тѣлу только одна сила, и слѣд., разложеніе ея представляетъ собою лишь геометрическое построеніе; если для одной силы не нашли источника то должно искать для двухъ, трехъ или болѣе, и только

тогда опредѣлится, какія силы и въ какомъ числѣ приложены къ тѣлу въ дѣйствительности.

Ньютономъ третій законъ формулируется такъ:

Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Дѣйствию всегда соответствуетъ равное и противоположное притягиваніе или дѣйствіе двухъ тѣлъ другъ на друга всегда равны и прямопротивоположно направлены.

Замѣтимъ, что высказанный нами законъ, требующій, чтобы дѣйствіе и притягиваніе были равны и прямопротивоположны (§ 88), даетъ возможность указать источникъ лишь для такихъ силъ, которыя дѣйствуютъ на массу безконечно малыхъ размѣровъ, да и источникомъ можетъ служить лишь масса размѣровъ также безконечно малыхъ. Иначе, для конечныхъ массъ о прямой противоположности не можетъ быть рѣчи, такъ какъ точекъ приложенія силъ будетъ безчисленное множество. Поэтому, когда силы приложены въ массѣ, занимающей конечный объемъ, надо предварительно разбить эту массу мысленно на безконечно малые элементы и затѣмъ уже искать источники для силъ, дѣйствующихъ на элементарныя массы.

Законъ о дѣйствіи и притягиваніи заканчивается собою тотъ рядъ опредѣленій или условій, съ помощью которыхъ вводится въ Механику понятіе о силѣ. Мы придерживались изложенія Ньютона, причемъ основнымъ понятіемъ служило у насъ понятіе о матеріи или массѣ, и изъ него, съ помощью понятій о времени и пространствѣ, мы получили, какъ производное понятіе, силу. Можно было бы идти обратнымъ путемъ и взять за основное понятіе силу, тогда понятіе о массѣ можно было бы ввести съ помощью ряда условій, подобныхъ вышеприведеннымъ.

91. Движеніе массы относительно другой массы. Въ § 89 мы упомянули, что физическимъ явленіемъ можетъ быть лишь движеніе одного тѣла относительно другого; опредѣлимъ точнѣе, что мы подразумѣваемъ подъ такимъ движеніемъ. Геометрическимъ образомъ, связаннымъ съ представленіемъ о массѣ, служить трехмѣрная среда (§ 38). Если масса твердая, т. е. такая, что разстояніе между любыми двумя точками въ ней остается постояннымъ, то среда, ей соответствующая, будетъ неизмѣняемою; для массы мягкой среда будетъ деформирующеюся. Въ первомъ случаѣ среду (неизмѣннѣю) легко распространить и за границы объема, занятого самою массою, а потому опредѣлить, что называется движеніемъ какой либо массы, твердой или мягкой безразлично, относительно твердой, нетрудно: это движеніе некоторой деформирующей или неизмѣнной среды, соответствующей движущейся массѣ.

въ средѣ неизмѣнно связанной съ твердою массою. Если же тѣло *A*, относительно котораго мы желаемъ рассмотреть движеніе другого тѣла *B*, само мягкое, то подъ движеніемъ тѣла *B* относительно *A*, соотвѣтствующимъ данному моменту, будемъ разумѣть движеніе *B* относительно массы *A*, затвердѣвшей въ той конфигураціи, которую она имѣла въ разсматриваемый моментъ. Такимъ образомъ, и здѣсь придется имѣть дѣло лишь съ движеніемъ въ неизмѣняемой средѣ

ДИНАМИКА ТОЧКИ.

ГЛАВА IX.

Материальная точка. Дифференциальные уравнения движения точки. Ихъ интегралы.

92. Материальная точка. Когда масса движется поступательно, можно ограничиться изучениемъ движения одной какой-нибудь точки этой массы. Тогда естественно и силу, дѣйствующую на тѣло, изобразить векторомъ, приложеннымъ къ выбранной нами точкѣ, представительницѣ остальныхъ точекъ тѣла. Такая точка, замѣняющая собою массу, носитъ названіе точки матеріальной. Вмѣсто того, чтобы говорить о тѣлѣ, движущемся поступательно подѣ дѣйствіемъ силы F , можно говорить о движении матеріальной точки, къ которой приложена та же сила F . Материальная точка характеризуется не только своими координатами, какъ точка геометрическая или кинематическая, но и своею массою, т. е. массою того тѣла, движение котораго представляется взятою матеріальною точкою.

Мягкое тѣло можетъ двигаться самымъ произвольнымъ образомъ, но мы всегда будемъ предполагать, что движения безконечно близкихъ точекъ массы различаются безконечно мало. Поэтому, если раздѣлить движущееся тѣло какими либо поверхностями, напр., координатными, на безконечно малые по объему элементы, то можно принять, что эти элементы движутся поступательно, и слѣд. каждый изъ нихъ можетъ быть замѣненъ матеріальною точкою съ безконечно малою массою. Такимъ образомъ и самый общій случай движения деформирующагося тѣла сводится къ рассмотрѣнію движения совокупности матеріальныхъ точекъ.

Динамика точки изучаетъ движение одной матеріальной точки подѣ дѣйствіемъ заданныхъ силъ. Рассмотримъ движе-

нія совокупности матеріальныхъ точекъ съ конечными или бесконечно малыми массами составить предметъ Динамики системы.

93. Дифференціальныя уравненія движенія матеріальной точки. Если второй законъ Ньютона, примененный къ матеріальной точкѣ, выразить формулою, то найдемъ:

$$(m\ddot{r}) = (F),$$

гдѣ m масса точки, \ddot{r} — ея ускореніе, F — равнодѣйствующая приложенныхъ силъ.

Когда система координатъ, опредѣляющихъ положеніе точки, декартова, то предъидущее равенство можно замѣнить тремя таковыми (§ 49):

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= mx'' = F \cos(Fx) = X; \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= my'' = F \cos(Fy) = Y; \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= mz'' = F \cos(Fz) = Z. \end{aligned} \quad (1)$$

Когда же координаты какія либо криволинейныя, то (§ 52) имѣемъ:

$$\begin{aligned} m \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial q_1} - \frac{\partial h}{\partial q_1} \right\} &= F \cos(F1) = Q_1; \\ m \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial q_2} - \frac{\partial h}{\partial q_2} \right\} &= F \cos(F2) = Q_2; \\ m \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial q_3} - \frac{\partial h}{\partial q_3} \right\} &= F \cos(F3) = Q_3; \end{aligned} \quad (2)$$

т. е. Q_1, Q_2, Q_3 проекціи равнодѣйствующей на соответственныя криволинейныя координаты.

Такъ напр. для сферическихъ координатъ (§§ 39 и 52), найдемъ:

$$\begin{aligned} m(\rho'' - \rho\varphi'^2 - \rho \sin^2\varphi \psi'^2) &= F \cos(F\alpha) = P; \\ m \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\varphi') - \rho \sin\varphi \cos\varphi \psi'^2 \right\} &= F \cos(F\beta) = \Phi; \\ m \frac{d}{dt}(\rho^2 \sin^2\varphi \psi') &= F \cos(F\gamma) = \Psi. \end{aligned} \quad (3)$$

Для цилиндрических, подобнымъ образомъ:

$$\begin{aligned} m s' &= F \cos (F\lambda) = Z; \\ m (r'' - r\theta'^2) &= F \cos (F\mu) = R; \\ m \frac{d}{dt} (r^2\theta') &= F \cos (F\nu) = H. \end{aligned} \quad (4)$$

Если возьмемъ проекціи ускоренія на касательную, радіусъ кривизны и бинормаль траектории, то (§§ 49 и 51) получимъ:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F_t; \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_\rho; \\ 0 &= F_\nu; \end{aligned} \quad (5)$$

гдѣ F_t , F_ρ , F_ν проекціи равнодѣйствующей на вышеупомянутыя три направленія.

Зависимость силъ отъ времени, положенія точки и скорости ея можетъ быть задана произвольно, т. е. въ равенствахъ общаго типа (2) количества Q_1 , Q_2 , Q_3 произвольныя данныя функции времени, координатъ, и первыхъ производныхъ отъ координатъ по времени:

$$Q_1 = f_1(t, q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3); \quad Q_2 = f_2; \quad Q_3 = f_3.$$

Производныхъ второго и высшихъ порядковъ не вводятъ аргументами въ функции f_1 , f_2 и f_3 потому, что связь между силами и ускорениями первого и высшаго порядка не можетъ быть дана по произволу, а должна согласоваться со вторымъ закономъ Ньютона.

Такимъ образомъ, равенства (2) представляютъ собою три зависимости между временемъ, координатами q_1 , q_2 , q_3 , ихъ первыми и вторыми производными по времени. Главная задача Динамики точки состоитъ въ опредѣленіи движенія точки по заданнымъ силамъ, слѣд. конечная цѣль ея заключается въ нахожденіи координатъ движущейся точки, какъ функций времени изъ равенствъ (2). Въ этомъ смыслѣ равенства (2) служатъ совокупными дифференціальными уравненіями второго порядка относительно трехъ неизвѣстныхъ функций времени q_1 , q_2 , q_3 и слѣд. задача Динамики сводится къ интегрированію системы этихъ совокупныхъ уравненій, носящихъ названіе дифференціальныхъ уравненій движенія матеріальной точки.

94. Интегралы движения. Приемы для интегрирования совокупных дифференциальных уравнений излагаются въ курсахъ. Анализа, — мы ограничимся здѣсь замѣчаніями самаго общаго характера. Такъ какъ дифференціальныя уравненія движения второго порядка относительно трехъ независимыхъ функций q_1, q_2, q_3 , то самыя общія выраженія для искомыхъ функций времени будутъ содержать шесть произвольныхъ постоянныхъ. Для полученія такихъ общихъ выраженій мы въ большинствѣ случаевъ пойдемъ нижеслѣдующимъ путемъ.

Функция h (§ 43) относительно скоростей q_1', q_2', q_3' степени второй, слѣд. производная $\frac{dh}{dq_j}$ будетъ линейною функциею отъ скоростей q_j , а потому лѣвыя части уравненій (2) содержатъ вторыя производныя отъ координатъ лишь линейнымъ образомъ. Положимъ, что систему (2) намъ удалось замѣнить ей равносильною такою

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \Phi_1(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') &= 0; \\ \frac{d}{dt} \Phi_2(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') &= 0; \\ \frac{d}{dt} \Phi_3(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Двѣ системы уравненій мы называемъ равносильными или эквивалентными тогда, когда одна изъ нихъ является слѣдствиемъ другой и наоборотъ другая слѣдствиемъ первой.

Но система (6) равносильна слѣдующей:

$$\begin{aligned}\Phi_1(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') &= C_1; \\ \Phi_2(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') &= C_2; \\ \Phi_3(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') &= C_3;\end{aligned}\tag{7}$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 произвольныя постоянныя. Равенства (7) и по-прежнему, т. е. содержаща время, произвольныя постоянныя, координаты, скорости и справедливы въ силу дифференциальныхъ уравненій движения, носятъ названіе **первыхъ интеграловъ движения**.

Допустимъ далѣе, что и систему (7) мы сумѣемъ свести къ такъ ей равносильной:

$$\frac{d}{dt} \Psi_1(t, q_1, q_2, q_3, C_1, C_2, C_3) = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \Psi_2(t, q_1, q_2, q_3, C_1, C_2, C_3) = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \Psi_3(t, q_1, q_2, q_3, C_1, C_2, C_3) = 0.$$

Но эта система равносильна следующей:

$$\begin{aligned} \Psi_1(t, q_1, q_2, q_3, C_1, C_2, C_3) &= C_4; \\ \Psi_2(t, q_1, q_2, q_3, C_1, C_2, C_3) &= C_5; \\ \Psi_3(t, q_1, q_2, q_3, C_1, C_2, C_3) &= C_6. \end{aligned} \quad (8)$$

Полученныя равенства и подобныя имъ, т. е. содержащія время, координаты, произвольныя постоянныя, не заключающія въ себѣ скоростей и справедливыя въ силу дифференціальныхъ уравненій движенія, носятъ названіе вторыхъ интеграловъ движенія. Когда найдены три независимыхъ другъ отъ друга вторыхъ интеграла, содержащихъ шесть независимыхъ другъ отъ друга произвольныхъ постоянныхъ, то задача интегрированія кончена: мы можемъ отсюда опредѣлить самыя общія выраженія для искомыхъ функцій времени q_1, q_2, q_3 , выраженія, содержащія шесть произвольныхъ постоянныхъ. Такъ въ нашемъ случаѣ изъ равенствъ (8) имѣемъ:

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ q_2 &= f_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ q_3 &= f_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \quad (9)$$

Въ томъ, что самыя общія выраженія для координатъ должны включатьъ въ себѣ шесть произвольныхъ постоянныхъ, мы можемъ убѣдиться и безъ помощи Анализа такими кинематическими соображеніями. Дифференціальныя уравненія движенія опредѣляютъ собою въ любой моментъ величину и направленіе ускоренія движущейся точки, слѣд., если мы въ какой либо данный моментъ t_0 , называемый начальнымъ, дадимъ движущейся точкѣ произвольное положеніе и сообщимъ ей произвольную скорость, то, зная

ускорение, съумѣемъ найти скорость и положеніе этой точки для момента t_1 , смежнаго съ начальнымъ. Принявши этотъ моментъ t_1 за начальный, тѣмъ же путемъ опредѣлимъ скорость и положеніе точки для момента t_2 , безконечно мало отстоящаго отъ t_1 , и т. д.; такимъ образомъ, вообще говоря, мы сумѣемъ найти скорость и положеніе точки для любого момента, слѣдующаго за начальнымъ или предшествовавшаго ему. Другими словами, мы опредѣлимъ движеніе точки при любомъ начальномъ положеніи и при любой начальной скорости, а для этого необходимо шесть произвольныхъ постоянныхъ. Давши соответственные значенія этимъ постояннымъ, мы заставимъ нашу движущуюся точку въ данный моментъ пройти черезъ данное положеніе съ данною скоростью. Если данный начальный моментъ — t_0 , данные начальные координаты точки — q_{10}, q_{20}, q_{30} , а данные начальные скорости (по координатамъ) — $q'_{10}, q'_{20}, q'_{30}$, то по (9) произвольныя постоянныя C_1, C_2, \dots, C_6 должны быть корнями уравненій:

$$0 = f_1(t_0, C_1, \dots, C_6), q_{20} - f_2(t_0, C_1, \dots, C_6), q_{30} - f_3(t_0, C_1, \dots, C_6),$$

$$0 = f'_1(t_0, C_1, \dots, C_6), q'_{20} - f'_2(t_0, C_1, \dots, C_6), q'_{30} - f'_3(t_0, C_1, \dots, C_6),$$

гдѣ запятою означены производныя по времени.

Всякая система N совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка можетъ быть замѣнена системою $2N$ уравненій перваго порядка. Поэтому, если мы къ самымъ дифференціальнымъ уравненіямъ (2) прибавимъ три такихъ уравненія:

$$\frac{dq_1}{dt} = q_1'; \quad \frac{dq_2}{dt} = q_2'; \quad \frac{dq_3}{dt} = q_3'; \quad (10)$$

получимъ шесть совокупныхъ уравненій перваго порядка относительно шести неизвѣстныхъ функций времени $q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3'$. Интегрированіе этой системы будетъ закончено, если намъ удастся найти шесть ея независимыхъ интеграловъ

$$\gamma_1(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') = A_1,$$

$$\gamma_2(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') = A_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\gamma_6(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') = A_6.$$

гдѣ A_1, \dots, A_n произвольныя постоянныя. Изъ написанныхъ равенствъ опредѣлимъ

$$q_1 = f_1(t, A_1, A_2, \dots, A_n);$$

$$q_2 = f_2(t, A_1, A_2, \dots, A_n);$$

$$q_3 = f_3(t, A_1, A_2, \dots, A_n);$$

$$q_1' = \varphi_1(t, A_1, A_2, \dots, A_n);$$

$$q_2' = \varphi_2(t, A_1, A_2, \dots, A_n);$$

$$q_3' = \varphi_3(t, A_1, A_2, \dots, A_n);$$

при чемъ должно оказаться, что

$$\varphi_1 = \frac{df_1}{dt}; \quad \varphi_2 = \frac{df_2}{dt}; \quad \varphi_3 = \frac{df_3}{dt};$$

какъ этого требуютъ уравненія (10).

ГЛАВА X.

Прямолинейное движение свободной материальной точки.

95. Условия, при которых свободная материальная точка движется прямолинейно. Въ предыдущей главѣ мы вывели дифференціальныя уравненія движения материальной точки подѣ дѣйствіемъ данныхъ силъ, когда движеніе этой точки ничѣмъ не стѣснено, не ограничено никакимъ заранее даннымъ условиемъ, или, какъ говорятъ, когда точка свободна. Теперь мы займемся разсмотрѣніемъ простѣйшаго случая движения свободной материальной точки, а именно того, когда эта точка движется прямолинейно. Если одну изъ координатныхъ осей, напр. Ox , направимъ параллельно разсматриваемой траекторіи, то уравненія этой траекторіи будутъ

$$y = \text{const}, \quad z = \text{const},$$

а слѣд. по (1) главы IX:

$$Y = 0, \quad Z = 0;$$

т. е. равнодѣйствующая должна имѣть постоянное направленіе, т. е. траекторіи.

Но этого условия недостаточно, ибо тогда два послѣднія уравненія движения (1) главы IX будутъ

$$y'' = 0, \quad z'' = 0,$$

которые интегрированіи дадутъ

$$y = at + \alpha, \quad z = bt + \beta,$$

гдѣ a, b, α, β произвольныя постоянныя. Условимся всегда означать моментъ t_0 , начальныя координаты точки x_0, y_0, z_0 .

начальные скорости по осямъ — v_0 , y_0 , z_0 . Тогда предыдущія равенства даютъ

$$y = y_0 (t - t_0) + y_0; \quad z = z_0 (t - t_0) + z_0;$$

откуда видимъ, что траекторія будетъ прямою, параллельною Ox , лишь тогда, когда

$$y_0' = 0; \quad z_0' = 0. \quad y = 0 \quad z = 0 \quad (2)$$

Такимъ образомъ по 1) и 2) свободная материальная точка описываетъ прямую линію тогда, когда сила, приложенная къ ней, имѣетъ постоянное направленіе, а начальная скорость параллельна этому направленію.

Въ дальнейшемъ мы будемъ брать траекторію за Ox ($y = 0$; $z = 0$) и слѣд. ограничимся изслѣдованіемъ одного только уравненія

$$mx'' = X = f(t, x, x'). \quad (3)$$

96. Прямолинейное движеніе подъ дѣйствіемъ силы, зависящей лишь отъ времени. Когда данныя силы зависятъ только отъ времени, т. е. когда

$$X = f(t),$$

задача о прямолинейномъ движеніи точки рѣшается весьма просто.

Интегрируя уравненіе (3) и опредѣляя произвольныя постоянныя по начальнымъ даннымъ, получаемъ

$$mx = mx_0 + \int_{t_0}^t f(t) dt.$$

Интегрируя еще разъ, имѣемъ окончательно.

$$mx = mx_0 + mx_0' (t - t_0) + \int_{t_0}^t dt \left\{ \int_{t_0}^t f(t) dt \right\}. \quad (4)$$

Примѣръ: Прямолинейное движеніе тяжелой точки. Если ось x ось направлена вертикально внизъ, а ускореніе тяжести означимъ g , то уравненіе движенія будетъ

$$mx'' = mg,$$

и слѣд. по (4):

$$x = x_0 + x_0' (t - t_0) + \frac{g}{2} (t - t_0)^2.$$

Если $x_0 > 0$, то съ самаго начала движенія (съ момента t_0) точка падать будетъ. Если $x_0 < 0$, то до момента $t_0 = \frac{x_0}{g}$ точка движется вверхъ, въ моментъ t приостанавливается на высотѣ $x = -\frac{x_0}{2g}$ и затѣмъ падаетъ внизъ.

97 Прямолинейное движеніе подъ дѣйствіемъ силы, зависящей лишь отъ положенія точки. Когда сила зависитъ только отъ положенія точки, т. е.

$$X = f(x),$$

то вопросъ о прямолинейномъ движеніи точки рѣшается съ помощью двухъ квадратуръ. Умножаемъ обѣ части уравненія (3) на

$$x' dt = dx,$$

тогда обратимъ ихъ въ полныя дифференціалы:

$$x' x'' dt = x' dx' = f(x) dx;$$

слѣд., интегрируя, найдемъ:

$$\frac{1}{2} x'^2 = F(x) + C,$$

гдѣ C произвольная постоянная, а $F(x) = \int f(x) dx$. Рѣшая полученное уравненіе относительно x' , имѣемъ

$$x' = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2 F(x) + 2C},$$

или

$$\frac{dx}{\sqrt{F(x) + C}} = \pm dt \sqrt{2};$$

интегрируя,

$$\sqrt{2} \pm B = \int \frac{dx}{\sqrt{F(x) + C}} = \Phi(x, t),$$

гдѣ B новая произвольная постоянная. Полученное равенство и даетъ x какъ функцію отъ t и двухъ постоянныхъ произволь-

Примѣры: а) Прямолінейное движеніе точки подѣ дѣйствіемъ силы притяженія къ неподвижному центру прямо пропорціонально разстоянію. *и масса точки*

Возьмемъ центръ притяженія за начало координатъ. Тогда, если коэффициентъ пропорціональности примемъ равнымъ k^2m , для силы F имѣемъ выраженіе:

$$F = k^2mr,$$

гдѣ r разстояніе отъ точки до начала координатъ, или

$$F = \pm k^2mx, \quad (5)$$

при чемъ должно взять верхній знакъ, если $x > 0$, т. е. точка на положительной половинѣ оси x -овъ, и нижній знакъ, если $x < 0$, т. е. точка на отрицательной половинѣ оси x -овъ. Сила F направлена къ началу координатъ, слѣд.

$$\cos(Fx) = \pm 1; \quad (6)$$

верхній знакъ надо взять, когда $x > 0$, а нижній, когда $x < 0$. Соединяя (5) и (6), получимъ для $X = F \cos(Fx)$ такое выраженіе

$$X = -k^2mx,$$

независимо отъ того, гдѣ точка находится, на положительной или на отрицательной половинѣ оси x -овъ.

Интегрируемъ уравненіе:

$$mx'' = -k^2mx.$$

вышеуказаннымъ способомъ; тогда, по сокращеніи на m , получаемъ

$$\frac{1}{2} x'^2 = -\frac{1}{2} k^2 x^2 + C.$$

Произвольную постоянную C определяемъ изъ начальныхъ условій:

$$C = \frac{1}{2} x_0'^2 + \frac{1}{2} k^2 x_0^2.$$

Слѣд. найденный интегралъ:

$$x'^2 = k^2 (n^2 - x^2), \quad (7)$$

гдѣ мы положили

$$k^2 n^2 = x_0'^2 + k^2 x_0^2.$$

Уже изъ (7) видимъ, что наибольшее удаленіе точки отъ притягивающаго центра не можетъ превышать n . Пусть положительное направленіе оси x -овъ выбрано такъ, что $x_0 > 0$, тогда по крайней мѣрѣ въ началѣ движе-

нѣя проекція скорости на Ox будетъ положительна. слѣд., извлекая радикаль со знакомъ $+$, получаемъ:

$$\frac{dx}{\sqrt{n^2 - x^2}} = k dt;$$

откуда

$$\arcsin \frac{x}{n} = kt + \gamma.$$

Произвольная постоянная

$$\gamma = \arcsin \frac{x_0}{n} - kt_0.$$

Иначе можемъ написать:

$$x = n \cdot \sin (kt + \gamma). \quad (8)$$

Движение, определяемое написаннымъ уравненіемъ, называется простымъ гармоническимъ движениемъ. Точка колеблется около центра движения; наибольшее отклоненіе ея отъ центра равно n и называется амплитудой. Движеніе гармоническое служитъ примѣромъ движений периодическихъ, т. е. такихъ, въ которыхъ движущаяся точка въ определенное время, отстоящее другъ отъ друга на постоянный промежутокъ T , занимаетъ одно и то же положеніе и имѣетъ одну и ту же скорость. Въ нашемъ случаѣ періодъ

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Если бы мы пожелали представить графически, какъ измѣняются съ теченіемъ времени скорость движущейся точки и разстояніе ея отъ притягивающаго центра, при чемъ абсцисса изображала бы собою время, а ордината — скорость или разстояніе, то мы получили бы кривыя линіи, называемыя синусоидами. Этими синусоидами часто пользуются въ Физикѣ, когда говорятъ о простомъ гармоническомъ движеніи.

Для линейнаго движенія точки подѣйствіемъ силы отталкиванія отъ неподвижнаго центра прямо пропорціоноально разстоянію отъ центра въ центрѣ отталкиванія. Тогда совершенно такъ, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, убѣдимся, что въ рассматриваемомъ случаѣ

$$X = k^2 mx,$$

и, исходя изъ пропорціоальности, взять равнымъ $k^2 m$.

Интегрируя уравненіе

$$mx'' = k^2 mx,$$

получимъ

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = C - \frac{1}{2} k^2 x^2,$$

или, определяя произвольную постоянную C по начальнымъ даннымъ:

$$x'^2 = x_0'^2 - k^2 x_0^2 + k^2 x^2 \quad (9)$$

Пусть положительное направление оси x совъ параллельно начальной скорости, тогда $x_0' > 0$, а потому, извлекая радикаль со знакомъ $+$, имѣемъ:

$$\sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2 + x^2} = k dt,$$

откуда интегрируя:

$$t, g \left(x + \sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2 + x^2} = kt + B.$$

Произвольная постоянная B опредѣлится такъ:

$$B = \log \left(x_0 + \frac{x_0'}{k} \right) - kt_0.$$

Подставляя это значеніе для B и замѣняя логарифмы числами, найдемъ:

$$x + \sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2 + x^2} = \left(x_0 + \frac{x_0'}{k} \right) e^{k(t-t_0)} \quad (10)$$

Приравнивая обратныя величины, получимъ

$$x + \sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2 + x^2} = \frac{x_0' + x_0 k}{k} e^{-k(t-t_0)};$$

что, послѣ упрощенія, даетъ:

$$x = \sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2 + x^2} \cdot \left(x_0 - \frac{x_0'}{k} \right) e^{-k(t-t_0)}. \quad (11)$$

Изъ (10) и (11), складывая, найдемъ

$$x = \frac{1}{2} \left\{ \left(x_0 + \frac{x_0'}{k} \right) e^{k(t-t_0)} + \left(x_0 - \frac{x_0'}{k} \right) e^{-k(t-t_0)} \right\}. \quad (12)$$

Постоянная $x_0'^2 - k^2 x_0^2$ можетъ быть больше нуля, меньше нуля и равна нулю. Разберемъ всѣ эти три случая.

$$1) \frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2 > 0$$

Въ выраженіи (12) беремъ за общій множитель $\sqrt{x_0^2 - x_0'^2}$; тогда
окажется

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0'^2} \left\{ e^{k(t-\tau)} - e^{-k(t-\tau)} \right\}, \quad (13)$$

если

$$e = e^{kt_0} \sqrt{\frac{x_0}{x_0' + kx_0}}.$$

Такъ какъ по (9) скорость не можетъ обратиться въ нуль, то движеніе происходитъ всегда въ одномъ направленіи, а именно въ положительномъ направленіи оси x —овъ (по условію, $x_0 > 0$). Если точка въ своемъ начальномъ положеніи была на положительной половинѣ оси x —овъ ($x_0 > 0$), то она съ постоянно возрастающею скоростью будетъ непрерывно удаляться отъ центра отталкиванія.

Если $x_0 < 0$, т. е. начальное положеніе на отрицательной половинѣ оси x —овъ, то скорость движущейся точки сначала уменьшается, пока не достигнетъ своего минимума $|x_0'| = k \cdot x_0'^2$ въ тотъ моментъ ($t = \tau$), когда движущаяся точка проходитъ черезъ центръ отталкиванія ($x = 0$); затѣмъ скорость все возрастаетъ и точка уходитъ на безконечность въ положительномъ направленіи оси x —овъ.

$$2) \frac{x_0'^2}{k^2} - x_0'^2 < 0.$$

Теперь въ выраженіи (12) беремъ за общій множитель $\sqrt{x_0'^2 - x_0'^2}$.

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0'^2} \left\{ e^{k(t-\lambda)} - e^{-k(t-\lambda)} \right\}, \quad (14)$$

$$e = e^{kt_0} \sqrt{\frac{kx_0 - x_0'}{kx_0 + x_0'}},$$

Изъ (14) видимъ, что наименьшее возможное числовое значеніе координаты x равняется

$$\sqrt{x_0'^2 - x_0'^2};$$

значенія скорости по (9) обращается въ нуль и затѣмъ увеличивается. Если $x_0 > 0$, то точка съ возрастающею скоростью удаляется на безконечность въ положительномъ направленіи оси x —овъ (по (9)). Если же $x_0 < 0$, то движущаяся точка съ убывающею скоростью приближается къ центру отталкиванія на минимальное расстояние

(въ моментъ $t = t_0$) и затѣмъ съ возрастающею скоростью уходитъ на безконечность въ отрицательномъ направленіи оси x -овъ.

$$3) \frac{x_0'^2}{k^2} - x_0 = 0.$$

Здѣсь могутъ быть два случая или $x_0 = kx_0 = 0$, или $x_0 = kx_0 = 0$. Въ первомъ случаѣ по (12):

$$x = x_0 e^{\frac{k(t-t_0)}{2}};$$

точка уходитъ на безконечность съ возрастающею скоростью въ положительномъ направленіи оси x -овъ (x_0 одного знака съ $x_0 > 0$).

Во второмъ случаѣ по (12):

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)};$$

точка асимптотически приближается къ центру отталкиванія.

98. Прямолинейное движеніе подъ дѣйствіемъ силы, зависящей лишь отъ скорости. Когда сила зависитъ только отъ скорости, т. е.

$$X = f(x'),$$

тогда въ уравненіи:

$$mx'' = f(x'), \quad (15)$$

замѣняемъ x'' черезъ $\frac{dx'}{dt}$ и получаемъ:

$$m \frac{dx'}{f(x')} = dt,$$

откуда, интегрируя:

$$\int \frac{m dx'}{f(x')} = \varphi(x') = t + A, \quad (16)$$

гдѣ A произвольная постоянная. Допустимъ, что изъ этого уравненія мы сумѣемъ найти x какъ функцію отъ $t + A$.

$$x = \psi(t + A)$$

или иначе

$$dx = \psi(t + A) dt.$$

Интегрируя, найдемъ

$$x + B = \int \psi(t + A) dt = \Phi(t + A),$$

что и рѣшаетъ вопросъ.

Когда изъ (16) нельзя найти x какъ явную функцію времени, можно поступить такъ; умножаемъ обѣ части уравненія (15) на $x' dt = dx$:

$$mx'x'dt = mx'dx' = f(x')dx,$$

или

$$\frac{mx dx}{f(x')} = dx,$$

откуда

$$\int \frac{mx dx}{f(x')} = \omega(x') = x + C, \quad (17)$$

гдѣ C произвольная постоянная. Пусть отсюда мы можемъ найти x' какъ явную функцію x :

$$x' = \frac{dx}{dt} = \lambda(x + C).$$

или

$$\frac{dx}{\lambda(x + C)} = dt.$$

Интегрируя, найдемъ:

$$\int \frac{dx}{\lambda(x + C)} = \Omega(x + C) = t + D,$$

уравненіе, опредѣляющее x какъ функцію времени и постоянныхъ произвольныхъ C и D .

Наконецъ, если уравненія (16) и (17) неразрѣшимы, то мы можемъ сохранить оба эти уравненія, такъ какъ второе опредѣляетъ x какъ функцію отъ x' , а первое даетъ зависимость x' отъ времени.

Примѣры: а) Прямолінейное движеніе тяжелой точки въ средѣ, сопротивляющейся пропорціонально первой степени скорости. Уравненіе движенія въ разсматриваемомъ случаѣ будетъ

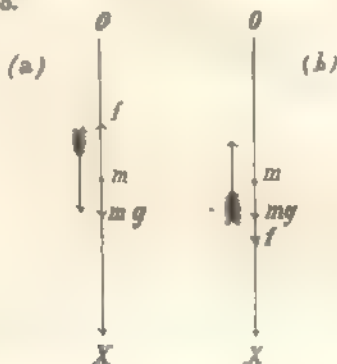
$$mx'' = mg + f \cos(fx); \quad (18)$$

ось x ось направлена вертикально вниз; g —ускорение тяжести; f —сила сопротивления. По условию сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости, слѣд.

$$f = \pm k^2 m x'. \quad (19)$$

если для удобства коэффициент пропорциональности возьмемъ равнымъ $k^2 m$. Верхній знакъ надо взять, когда $x < 0$, т. е. точка падаетъ вниз (Фиг. 53 а),

Фиг. 53.



а нижній, когда $x > 0$, т. е. точка брошена вверх (Фиг. 53 б). Но сила сопротивления всегда противоположна направлению движения точки, слѣд.

$$\cos(fx) = -1, \quad (20)$$

гдѣ надо взять верхній знакъ, когда $x > 0$ (Фиг. 53 а), и нижній, когда $x < 0$ (Фиг. 53 б). Соединяя (19) и (20), найдемъ по (18) уравненіе:

$$x'' = g - k^2 x.$$

справедливое независимо отъ того, въ какомъ направленіи движется точка. Замѣтимъ, что уравненіе движения сохранило бы свой видъ для двухъ направлений при всякой силѣ сопротивленія, пропорціональной нечетной степени скорости.

Полученному уравненію дадимъ видъ:

$$\frac{dx'}{g - k^2 x} = dt,$$

откуда, интегрируя, имѣемъ:

$$\log(g - k^2 x) = -k^2 t + \log C,$$

или

$$g - k^2 x = C e^{-k^2 t}.$$

Произвольную постоянную C определим из начальных условий полагая $t_0 = 0$:

$$C = g - k^2 x_0'.$$

А потому

$$x = \frac{g}{k^2} - \frac{g}{k^2} - x_0' - \frac{1}{k^2} e^{-k^2 t}.$$

следоват. послѣ интегрирования и опредѣленія произвольной постоянной найдемъ.

$$x = x_0 + \frac{g}{k^2} t + \frac{1}{k^2} \left(\frac{g}{k^2} - x_0' \right) (e^{-k^2 t} - 1).$$

Движеніе асимптотически приближается къ равномерному со скоростью независящею отъ начальныхъ условий. Положеніе движущейся точки при весьма большомъ мало отличается отъ того, которое она занимала бы, если бы вышла изъ начального положенія $x = x_0$, $x_0' = \frac{g}{k^2}$, двигалась равномерно со скоростью $\frac{g}{k^2}$.

б) Прямолінейное движеніе тяжелой точки въ средѣ, сопротивляющейся пропорціонально второй степени скорости. Направимъ ось x —отъ вертикально внизъ. Тогда уравненіе движенія въ обозначеніяхъ предыдущаго примѣра будетъ:

$$mx'' = mg + f \cos(fx).$$

Въ вѣстонщемъ случаѣ $f = k^2 mx$, если коэффициентъ пропорціональности равенъ $k^2 m$. Что же касается до косинуса угла (fx), то по предположенію:

$$\cos(fx) = \pm 1,$$

беремъ верхній знакъ надо взять для движенія внизъ, а нижній для движенія вверхъ. Такимъ образомъ мы получаемъ для движенія внизъ уравненіе:

$$x'' = g - k^2 x^2, \quad (21)$$

для движенія вверхъ:

$$x'' = g + k^2 x^2. \quad (22)$$

Изъ уравненіе переходитъ въ другое при помощи замѣны x черезъ

Будем интегрировать уравнение вида (21). Умножая обе части на dt , получимъ.

$$\frac{dx}{g - k^2 x'^2} = dt,$$

или

$$\frac{k dx}{\sqrt{g + kx'}} + \frac{k dx}{\sqrt{g - kx'}} = 2k \int g \cdot dt,$$

откуда, интегрируя:

$$\log \sqrt{g + kx'} + 2kt \sqrt{g} - \log C \\ \sqrt{g - kx'}$$

Полагая $t = 0$, определяемъ произвольную постоянную C :

$$C = \sqrt{g + kx_0} \cdot e^{2kt \sqrt{g}} \cdot \sqrt{g - kx_0}$$

Слѣд. найденный первый интегралъ можно переписать такъ:

$$\sqrt{g + kx} \cdot \sqrt{g + kx_0} e^{2kt \sqrt{g}} \cdot \sqrt{g - kx_0}$$

Рѣшая относительно x' , имѣемъ:

$$\frac{1}{k} \log \left(\frac{\sqrt{g + kx} \cdot \sqrt{g + kx_0} e^{2kt \sqrt{g}} \cdot \sqrt{g - kx_0}}{(\sqrt{g + kx_0}) e^{2kt \sqrt{g}} + (\sqrt{g - kx_0})} \right)$$

$$= \frac{1}{k} \frac{d}{dt} \log \left\{ \left(\sqrt{g + kx_0} \right) e^{kt \sqrt{g}} \left(\sqrt{g - kx_0} \right) e^{-kt \sqrt{g}} \right\}. \quad (23)$$

Интегрируя, получаемъ:

$$x = B + \frac{1}{k} \log \left\{ \left(\sqrt{g + kx_0} \right) e^{kt \sqrt{g}} \left(\sqrt{g - kx_0} \right) e^{-kt \sqrt{g}} \right\}.$$

Произвольная постоянная.

$$B = x_0 - \frac{1}{k} \log 2 \sqrt{g}.$$

Поэтому

$$x = x_0 + \frac{1}{k^2} \log \left\{ \frac{1}{2} \left(e^{\frac{kt}{g}} - e^{-\frac{kt}{g}} \right) \right\} - \frac{k}{2g} x_0 \left(e^{\frac{kt}{g}} - e^{-\frac{kt}{g}} \right). \quad (24)$$

Изъ (23) видно, что движение асимптотически приближается къ равно-
мѣрному со скоростью $\frac{1}{k}$, независящею отъ начальныхъ условий.

Чтобы получить формулу для движения снизу вверхъ, подставляемъ въ
(24) вмѣсто k выраженіе k — 1; получаемъ

$$x = x_0 + \frac{1}{k^2} \log \left\{ \cos(kt) \right\} - \frac{k}{2g} x_0 \sin(kt). \quad (25)$$

Точка останавливается въ моментъ

$$\tau = \frac{1}{k\sqrt{g}} \arccos \left(-\frac{kx_0}{\sqrt{g}} \right)$$

сдѣдъ съ этого момента надо пользоваться формулою (24), при чемъ x_0 надо
замѣнить значеніемъ правой части (25) для $t = \tau$, а x_0 положить равнымъ
нулю.

в) Въ видѣ примѣра на второй приемъ интегрированія уравненія дви-
женія въ разсматриваемомъ случаѣ, рѣшимъ такую задачу: тяжелая точка
брошена вверхъ съ начальною скоростью v_0 и движется въ средѣ, сопро-
тивленіе въ которой пропорціонально второй степени скоро-
сти, определить, съ какою скоростью точка вернется въ первоначальное по-
ложеніе.

Начало движенія происходитъ сообразно съ дифференціальнымъ урав-
неніемъ (22):

$$x'' = -g - k^2 x^2$$

Представивъ его подъ видомъ:

$$\frac{2k^2 x dx'}{g + k^2 x^2} = 2k^2 dx,$$

интегрируемъ:

$$\log(g + k^2 x^2) = 2k^2 x + \log C. \quad (26)$$

Если начало координатъ помѣстимъ въ начальномъ положеніи точки,
положимъ $x_0 = 0$, то постоянная

$$C = g + k^2 v_0^2.$$

и, вмѣсто (26)

$$g + k^2 x^2 = (g + k^2 v_0^2) e^{2k^2 x}. \quad (27)$$

Координата той точки, въ которой движущаяся остановится, найдемъ изъ предыдущаго уравненія полагая въ немъ $x = 0$. Искомая координата отрицательна, слѣд., если ее означимъ черезъ h , h будетъ > 0 и по (27):

$$e^{-2kh} = \frac{g}{g + k^2 v_0^2}$$

или

$$e^{2kh} = 1 + \frac{k^2}{g} v_0^2. \quad (28)$$

Для движенья внизъ замѣнимъ въ (26) k на $-k$

$$\log(g - k^2 x^2) = -2kx + \log C.$$

Произвольную постоянную C находимъ, замѣчая, что $x_0 = h$, $x_0 = 0$:

$$C = g e^{-2kh}.$$

Слѣдовательно

$$g - k^2 x^2 = g e^{-2k(h+x)}.$$

Скорость w , съ которою точка вернется въ начало координатъ, найдемъ, если въ предыдущемъ уравненіи положимъ $x = 0$:

$$k^2 w^2 = g \left(1 - e^{-2kh} \right) = g e^{-2kh} \left(e^{2kh} - 1 \right).$$

А пользуясь (28), находимъ окончательно.

$$w^2 = v_0^2 e^{-2kh}.$$

ГЛАВА XI.

Простейшіе случаи криволинейнаго движенія свободной матеріальной точки.

99. Криволинейное движеніе точки, сводящееся на задачу о нѣсколькихъ прямолинейныхъ движеніяхъ отдѣльныхъ точекъ. Если X, Y, Z — действующая сила, приложенныхъ къ движущейся точкѣ, то имѣемъ, что

$$X = f_1(t, x, x'); \\$$

$$Y = f_2(t, y, y'); \\$$

$$Z = f_3(t, z, z'); \\$$

являясь очевидно, каждое изъ уравненій движенія:

$$mx'' = X = f_1(t, x, x'); \\$$

$$my'' = Y = f_2(t, y, y'); \\$$

$$mz'' = Z = f_3(t, z, z'); \\$$

каждая изъ которыхъ можетъ быть проинтегрирована независимо отъ другихъ, и слѣд., криволинейное движеніе рассматриваемой точки сводится къ рѣшенію трехъ задачъ о прямолинейномъ движеніи трехъ точекъ, проецируемыхъ на оси координатъ.

Рассмотримъ теперь изъ такихъ движеній и рассмотримъ въ настоящемъ параграфѣ.

100. Криволинейное движеніе тяжелой точки. Возьмемъ ось z направленно вертикально книзу, ускореніе тяжести означимъ g ; тогда для движенія будутъ:

$$mx'' = 0; \quad my'' = 0; \quad mz'' = mg.$$

Непосредственно интегрируя их и определяя произвольные постоянные, получимъ:

$$x = x_0 + x_1 (t - t_0);$$

$$y = y_0 + y_1 (t - t_0);$$

$$z = z_0 + z_1 (t - t_0) + \frac{g}{2} (t - t_0)^2.$$

Исключая время, находимъ уравненія траекторіи:

$$y - y_0 = \frac{y_1}{x_1} (x - x_0);$$

$$z - z_0 = \frac{g}{2} \left(\frac{x - x_0}{x_1} \right)^2.$$

Возьмемъ начало координатъ въ начальномъ положеніи ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$), плоскость zOx проведемъ черезъ направленіе начальной скорости ($y_1 = 0$), уголъ начальной скорости съ осью x -овъ (уголъ прицѣла) означимъ черезъ α , причеиъ α считаемъ отъ оси x -овъ къ отрицательной оси z -овъ (кверху). Тогда предшдущія уравненія траекторіи примутъ видъ:

$$y = 0; \quad z = -x \tan \alpha + \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (1)$$

Траекторіей служить вертикальная парабола съ вершиною кверху. Положимъ, что данная матеріальная точка представляетъ собою артиллерійскій снарядъ, движущійся въ безвоздушномъ пространствѣ; рѣшимъ такую задачу: найти уголъ прицѣла, подъ которымъ надо пустить снарядъ изъ начала координатъ съ данною начальною скоростью для того, чтобы онъ попалъ въ данную точку (ξ, ζ) плоскости zOx . Рѣшая уравненіе (1), находимъ для $\tan \alpha$ два значенія:

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{g \xi} \pm \frac{1}{g \xi} \sqrt{2 g v_0^2 \left(\zeta - \frac{g \xi^2}{2 v_0^2} - 2 q \right)}.$$

Такимъ образомъ, мы можемъ по двумъ траекторіямъ (настильной и навѣсной) довести снарядъ до назначенной цѣли; но для того, чтобы задача была возможна, данная точка (ξ, ζ) должна лежать внутри параболы

$$\zeta = \frac{g \xi^2}{2 v_0^2} - \frac{v^2}{2g} = 0. \quad (2)$$

Для точекъ, лежащихъ на этой параболѣ, обѣ траекторіи. востпльная и навѣсная, сливаются въ одну.

101. Притяженіе точки неподвижнымъ центромъ прямопорціонально разстоянію. Помѣстимъ притягивающій центръ въ началѣ координатъ. Тогда, если положимъ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

то F , приложенная къ движущейся точкѣ, будетъ

$$F = k^2 mr.$$

Косинусы угловъ этой силы съ осями координатъ противоположны по знаку косинусамъ угловъ, образуемыхъ съ осями движущимъ векторомъ движущейся точки, т. е

$$\cos(Fx) = -\frac{x}{r}; \quad \cos(Fy) = -\frac{y}{r}; \quad \cos(Fz) = -\frac{z}{r}.$$

Отсюда, по сокращеніи на m , получаемъ такіа уравненія:

$$x'' = -k^2 x; \quad y'' = -k^2 y; \quad z'' = -k^2 z.$$

Интегралъ перваго уравненія былъ уже нами найденъ въ видѣ формулы (8) главы X:

$$x = n \sin(kt + \gamma), \quad (8)$$

$$n = \frac{x_0'^2 + x_0^2}{k^2}; \quad \gamma = \arcsin \frac{x_0}{n} - kt_0.$$

Изъ него

$$x = n \cos \gamma \sin kt + n \sin \gamma \cos kt.$$

Положимъ $t_0 = 0$, тогда

$$\sin \gamma = \frac{x_0}{n}; \quad \cos \gamma = -\frac{x_0'}{kn};$$

$$x = x_0 \cos kt + \frac{x_0'}{k} \sin kt. \quad (4)$$

Изъ двойного знака при $\cos \gamma$ сохраняемъ лишь $-$, такъ какъ правая часть (4) послѣ дифференцированія по t должна дать намъ выраженіе для x' , т. е. для $t = 0$ обратиться въ x_0' .

По аналогіи съ (4) имѣемъ:

$$y = y_0 \cos kt + \frac{y_0'}{k} \sin kt \quad (5)$$

$$z = z_0 \cos kt + \frac{z_0'}{k} \sin kt.$$

Направимъ ось x -овъ черезъ начальное положеніе точки (x_0, y_0, z_0) , а плоскость xOy проведемъ черезъ направленіе начальной скорости $z_0 = 0$, тогда уравненія (4) и (5) примутъ видъ:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{x_0'}{k} \sin kt;$$

$$y = \frac{y_0'}{k} \sin kt;$$

$$z = 0.$$

Последнее уравненіе показываетъ, что траекторія кривая плоская. Чтобы исключить время изъ первыхъ двухъ уравненій, находимъ значенія

$$\sin kt = \frac{yk}{y_0'}; \quad \cos kt = \frac{1}{x_0'} \left(x - \frac{yx_0'}{y_0'} \right);$$

возвышаемъ въ квадратъ и складываемъ:

$$\frac{y^2 k^2}{y_0'^2} + \frac{1}{x_0'^2} \left(x - \frac{yx_0'}{y_0'} \right)^2 = 1.$$

Это уравненіе кривой второго порядка, относенное къ центру; составляя дискриминантъ, убѣждаемся, что онъ отрицателенъ:

$$4 \cdot \frac{x_0'^2}{y_0'^2 x_0'^4} - \frac{4}{x_0'^2} \left(\frac{x_0'^2}{y_0'^2 x_0'^2} - \frac{k^2}{y_0'^2} \right) - \frac{4 k^2}{y_0'^2 x_0'^2} = 0.$$

Такимъ образомъ траекторію служитъ эллипсъ, центръ коего лежитъ въ притягивающемъ полюсѣ.

102. Отталкивание точки неподвижнымъ центромъ прямопропорционально разстоянію. Беремъ опять начало координатъ въ центрѣ отталкиванія: тогда подобно тому, какъ это было сдѣлано въ предъидущемъ параграфѣ, приходимъ къ уравненіямъ:

$$x'' = k^2 x; \quad y'' = k^2 y; \quad z'' = -k^2 z.$$

Интегралъ перваго уравненія мы уже имѣли въ формулѣ (12) главы X; для $t_0 = 0$:

$$x = \frac{1}{2} \left\{ \left(x_0 + \frac{x_0'}{k} \right) e^{kt} + \left(x_0 - \frac{x_0'}{k} \right) e^{-kt} \right\}. \quad (6)$$

По аналогіи для другихъ координатъ:

$$y = \frac{1}{2} \left\{ \left(y_0 + \frac{y_0'}{k} \right) e^{kt} + \left(y_0 - \frac{y_0'}{k} \right) e^{-kt} \right\},$$

$$z = \frac{1}{2} \left\{ \left(z_0 + \frac{z_0'}{k} \right) e^{kt} + \left(z_0 - \frac{z_0'}{k} \right) e^{-kt} \right\}. \quad (7)$$

Проведемъ Ox черезъ начальное положеніе точки ($y_0 = z_0 = 0$), а ось Oy черезъ начальную скорость ($x_0 = 0$); тогда

$$x = \frac{1}{2} \left\{ \left(x_0 + \frac{x_0'}{k} \right) e^{kt} + \left(x_0 - \frac{x_0'}{k} \right) e^{-kt} \right\};$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{y_0'}{k} \left(e^{kt} - e^{-kt} \right);$$

$$z = 0;$$

какъ и подобно предъидущему параграфу, легко убѣждаемся, что траекторія служитъ гиперболою съ центромъ въ отталкивающемъ

ГЛАВА XII.

Законъ моментовъ количества движенія. Законъ живой силы.

103. Законъ моментовъ количества движенія матеріальной точки. По второму закону Ньютона (§ 89) сила, дѣйствующая на матеріальную точку, представляетъ собою геометрическую производную отъ количества движенія точки. Если мы станемъ теперь разсматривать оба эти вектора—силу и количество движенія—какъ векторы, приложенные къ движущейся точкѣ, то по §§ 4 и 53 окажется, что приложенный къ движущейся точкѣ векторъ—сила представляетъ собою геометрическую производную отъ приложеннаго къ той же точкѣ вектора—количества движенія. Это можно видѣть и непосредственно. Возьмемъ за координаты приложеннаго вектора силы (§ 13) три проекціи ея на оси координатъ (R_x, R_y, R_z) и три момента ея вокругъ осей (L_x, L_y, L_z). Тогда

$$R_x = X; R_y = Y; R_z = Z;$$

$$L_x = Zy - Yz; L_y = Xz - Zx; L_z = Yx - Xy;$$

или по второму закону Ньютона:

$$R_x = ma''; R_y = my''; R_z = mz'';$$

$$L_x = m(yz'' - zy''); L_y = m(zx'' - xz''); L_z = m(xy'' - yx''). \quad (1)$$

А для приложеннаго вектора—количества движенія (§ 86) имѣемъ слѣдующія координаты:

$$r_x = mx'; r_y = my'; r_z = mz';$$

$$l_x = m(yz' - zy'); l_y = m(zx' - xz'); l_z = m(xy' - yx'). \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{dr_x}{dt} &= R_x; \quad \frac{dr_y}{dt} = R_y; \quad \frac{dr_z}{dt} = R_z; \\ \frac{dl_x}{dt} &= L_x; \quad \frac{dl_y}{dt} = L_y; \quad \frac{dl_z}{dt} = L_z; \end{aligned} \quad (3)$$

и доказываетъ высказанное положеніе, такъ какъ начало координатъ по условію точка неподвижная (§§ 35 и 36).

Послѣднія три равенства (3) могутъ быть замѣнены однимъ геометрическимъ:

$$(l) = (L) \quad (4)$$

и L моменты количества движенія точки и равнодѣйствующей вокругъ начала координатъ.

Равенство (4) выражаетъ собою слѣдующую теорему, называемую закономъ момента количества движенія материальной точки: геометрическая производная по времени момента количества движенія точки вокругъ неподвижнаго полюса (начала координатъ) геометрически равна моменту равнодѣйствующей силы вокругъ того же полюса.

Иначе эту теорему можно выразить такъ (§ 31): скорость перемѣняющей годографъ момента количества движенія материальной точки вокругъ неподвижнаго полюса, геометрически равна скорости равнодѣйствующей силы вокругъ того-же полюса.

104 Секторіальная скорость матеріальной точки вокругъ оси. Называя для моментовъ количества движенія: l_x, l_y, l_z , можно вывести формулу, отличную отъ (2). Означимъ черезъ m , проекцію движенія точки $m(x, y, z)$ на плоскость xy , радіусъ-векторъ точки отъ начала координатъ ρ , а уголъ ρ съ осью y -овъ θ .

Тогда $x = \rho \cos \theta$; $y = \rho \sin \theta$; а потому

$$l_z = m(yx' - xy') = m\rho^2 \theta' = 2m S_\theta,$$

гдѣ S_θ мы разумѣемъ (§ 47) секторіальную скорость точки m въ плоскости xy или, какъ говорятъ короче, секторіальную скорость точки m вокругъ Ox . То же самое можно сказать относительно къ другимъ осямъ, и слѣд. вѣдѣно (3)

$$L_x = 2m \frac{dS_y}{dt}; \quad L_y = 2m \frac{dS_z}{dt}; \quad L_z = 2m \frac{dS_x}{dt} \quad (5)$$

105. Интегралъ площадей. Положимъ, что сила, приложенная къ матеріальной точкѣ, во все время движенія лежитъ съ нѣкоторою постоянною прямою въ одной плоскости.

Примемъ упомянутую прямую за ось z -овъ; тогда будемъ имѣть: $L_z = 0$, а слѣд. по (3) такой интегралъ

$$I_z = \text{const.}; \quad (6)$$

т. е. моментъ количества движенія вокругъ Oz постояненъ.

Иначе по (5):

$$\Delta_z = \text{const.}; \quad (7)$$

т. е. секторіальная скорость движущейся точки вокругъ оси z -овъ постоянна. Поэтому-то первому интегралу движенія (6):

$$m(xy' - yx') = \text{const.},$$

и даютъ названіе интеграла площадей.

106. Два интеграла площадей. Положимъ, что мы имѣемъ одновременно два интеграла площадей, т. е., что

$$L_x - Zy - Yz = 0; \quad L_y - Xz - Zx = 0.$$

Но тогда изъ перваго равенства слѣдуетъ

$$\frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

а изъ второго

$$\frac{X}{x} = \frac{Z}{z},$$

и слѣдовательно

$$\frac{Y}{y} = \frac{X}{x},$$

т. е.

$$Yx - Xy - I_z = 0;$$

и къ двумъ даннымъ интеграламъ площадей

$$I_x = C_1, \quad I_y = C_2; \quad (8)$$

присоединяется третій

$$I_z = C_3,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 произвольныя постоянныя.

Заключенія наши несправедливы лишь тогда, когда одновременно

$$Z = 0, \varepsilon = 0;$$

и въ такомъ случаѣ интегралы (8):

$$m(yz' - zy') = C_1; m(xz' - xz') = C_2;$$

превращаются въ тождества вида $0 = 0$ ($z = z' = 0, C_1 = C_2 = 0$).

Отсюда выводимъ, что интеграловъ площадей или одинъ, или три, или ни одного.

107. Три интеграла площадей. Пусть во все время движенія

$$L_x = L_y = L_z = 0;$$

или

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Эти равенства показываютъ, что направленіе равнодѣйствующихъ силъ постоянно проходитъ черезъ неподвижный полюсъ относительно координатъ. Тогда имѣемъ одновременно три интеграла площадей:

$$\begin{aligned} L_x &= m(yz' - zy') = C_1; \\ L_y &= m(xz' - xz') = C_2; \\ L_z &= m(xy' - yx') = C_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Написанныя равенства выражаютъ собою (§ 10), что моментъ количества движенія точки вокругъ начала координатъ постояненъ въ величинѣ и направленію. Величина этого момента

$$I = +\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}. \quad (10)$$

Согласно по (5) интегралы (9) показываютъ, что секторіальныя моменты точки вокругъ трехъ координатныхъ осей постоянны:

$$S_x = \frac{1}{2m} C_1; S_y = \frac{1}{2m} C_2; S_z = \frac{1}{2m} C_3. \quad (11)$$

Проведемъ черезъ начало координатъ какую-либо ось l , образуемъ углы, косинусы которыхъ пусть α, β, γ . Тогда имѣемъ количества движенія точки около этой оси l :

$$L_l = L_x \alpha + L_y \beta + L_z \gamma = C_1 \alpha + C_2 \beta + C_3 \gamma = \text{const.},$$

слѣд. секторіальная скорость движущейся точки вокругъ любой оси, проходящей черезъ начало координатъ, постоянна. Наибольшую секторіальную скорость будетъ имѣть точка вокругъ оси, совпадающей по направлению съ l . Величина этой максимальной скорости по (10) и (11) слѣдующая:

$$\frac{1}{2m} \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}.$$

Наименьшей секторіальной скорости, равной нулю, соответствуютъ оси, лежащая въ плоскости перпендикулярной къ направлению l .

Въ разсматриваемомъ случаѣ легко получить и второй интегралъ движенія (безъ скоростей) Умножаемъ равенства (9) соответственно на x, y, z и складываемъ, получаемъ:

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0, \quad (12)$$

уравненіе плоскости траекторіи или орбиты движущейся точки. Изъ уравненія видимъ, что нормаль къ плоскости орбиты параллельна вектору l , а слѣд. сама плоскость служитъ геометрическимъ мѣстомъ осей съ секторіальной скоростью, равною нулю, что очевидно само собою.

108. Законъ живой силы. Возьмемъ уравненія движенія (1) главы IX:

$$mx'' = X; my'' = Y; mz'' = Z;$$

умножимъ ихъ соответственно на

$$x'dt = dx; y'dt = dy; z'dt = dz;$$

и сложимъ:

$$m(x'x''dt + y'y''dt + z'z''dt) = m(x'dx + y'dy + z'dz) \\ = Xdx + Ydy + Zdz, \quad (13)$$

Лѣвая часть представляетъ собою полный дифференціалъ отъ величины

$$T = \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{m}{2} v^2;$$

если черезъ v означимъ скорость точки.

Количество T , т. е. произведеніе изъ массы матеріальной точки на половину квадрата ея скорости, называется живою

матеріальной точки или кинетическою энергіею
Замѣтимъ, что съ одной стороны:

$$X = F \cos(Fx); Y = F \cos(Fy); Z = F \cos(Fz),$$

гдѣ F сила, приложенная къ матеріальной точкѣ; а съ другой

$$dx = ds \cos(ds, x); dy = ds \cos(ds, y); dz = ds \cos(ds, z).$$

гдѣ ds элементъ траекторіи или элементарное перемѣщеніе движущейся точки. Поэтому правой части равенства (13) можемъ дать

$$Xdx + Ydy + Zdz = Fds \cos(F, ds).$$

Произведеніе изъ силы на элементарное перемѣщеніе точки въ направленіи и на косинусъ угла между этими двумя векторами — названіе работы силы на элементарномъ перемѣщеніи или, короче, элементарной работы силы.

Такимъ образомъ равенство (13) принимаетъ теперь видъ

$$dT = Fds \cos(F, ds) \quad (14)$$

гдѣ T — живая сила точки. Этотъ законъ живой силы: приращеніе живой силы матеріальной точки равно произведенію равнодѣйствующей силы на соответствующемъ перемѣщеніи.

Если написанное равенство (14) проинтегрируемъ между какою либо двумя моментами t_0 и t , то законъ живой силы можно выразить такъ:

$$\int_{t_0}^t dT = T - T_0 = \int_{t_0}^t Fds \cos(F, ds), \quad (15)$$

гдѣ T живая сила точки въ моменты t и t_0 ; т. е. словами: приращеніе живой силы за промежутокъ времени $t - t_0$ равняется произведенію равнодѣйствующей за тотъ-же промежутокъ. Подъ работой мы понимаемъ сумму элементарныхъ работъ ея за это время. Единицею работы, а слѣд. по (15) и единицею живой силы будемъ считать: 1 динъ (сантим.) (граммъ (сантим.)) (сек. сред. врем.)

109. Интеграль живой силы. Функция силовая. Функция потенциальная. Положимъ, что сила, дѣйствующая на матеріальную точку, такова, что проекціи ея на координатныя оси могутъ быть представлены, какъ частныя производныя по соответственнымъ координатамъ отъ некоторой функции U , называемой тогда силовой; т. е. пусть

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}; \quad (16)$$

и слѣд. между проекціями X, Y, Z существуютъ три зависимости:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}; \quad (17)$$

при томъ, конечно, выраженія X, Y, Z не должны заключать въ себѣ ни времени, ни скоростей (x', y', z'). Тогда равенство (18) принимаетъ видъ:

$$dT = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU;$$

и приводить къ первому интегралу движенія, называемому интеграломъ живой силы:

$$T = U + h, \quad (18)$$

гдѣ h произвольная постоянная.

Вмѣсто силовой функции U можно разсматривать функцию потенциальную W , такъ связанную съ силовой

$$W = -U.$$

Поэтому о силахъ, выполняющихъ условія (17), говорятъ, что эти силы имѣютъ потенциалъ. Функцию W называютъ также потенциальною энергіею точки, а сумму $T + W$ кинетической и потенциальной энергій—полною энергіею точки. Тогда интеграль живой силы:

$$T + W = h$$

выражаетъ собою постоянство энергій точки.

Замѣтимъ, что работа силъ, имѣющихъ потенциалъ, зависитъ лишь отъ начального и конечнаго положенія матеріальной точки и вовсе не зависитъ отъ промежуточныхъ ея положеній; дѣйствительно, тогда

$$\int_{t_0}^t (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_{t_0}^t dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0);$$

если (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0) положенія движущейся точки въ моменты t и t_0 .

Кромѣ того изъ (18) видимъ, что всякій разъ, когда точка проходитъ черезъ какое нибудь произвольно выбранное положеніе, она имѣетъ въ немъ одну и ту же живую силу.

110. Силы, имѣющія своимъ источникомъ неподвижные центры и зависящія лишь отъ разстоянія. Самымъ важнымъ примѣромъ силъ, зависящихъ отъ разстоянія, служатъ силы притяженія или отталкиванія неподвижныхъ центровъ пропорціонально нѣкоторой функции разстоянія.

Пусть неподвижный центръ m , занимаетъ положеніе a, b, c , и притягиваетъ матеріальную точку m (масса ея равна единицѣ, или грамму), находящуюся отъ него въ разстояніи ρ , съ силою $\varphi(\rho)$, гдѣ

$$\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}. \quad (19)$$

Тогда проекціи силы, приложенной къ m , будутъ:

$$X = \varphi(\rho) \frac{x-a}{\rho}; \quad Y = \varphi(\rho) \frac{y-b}{\rho}; \quad Z = \varphi(\rho) \frac{z-c}{\rho}; \quad (20)$$

т. е. направленіе силы идетъ отъ m , къ m . Если бы центръ отталкивалъ, а притягивалъ, то проекціи силы приняли бы

$$X = \varphi(\rho) \frac{a-x}{\rho}; \quad Y = \varphi(\rho) \frac{b-y}{\rho}; \quad Z = \varphi(\rho) \frac{c-z}{\rho};$$

т. е. тогда направленіе силы шло бы отъ m къ m . Сравнивая эти формулы, видимъ, что одни выраженія получаются изъ другихъ простымъ замѣненіемъ x на $a-x$. Поэтому, чтобы соблюсти единообразіе въ обозначеніяхъ, для силъ притягательныхъ брать при $\varphi(\rho)$ не имѣетъ значения, для закона Ньютона притяженія

Тогда формула (20) сохранитъ свой общій характеръ и для силъ отталкивательныхъ, такъ и для притягательныхъ. Если имѣетъ n неподвижныхъ центровъ, всего n , то равнодѣйствующая имъ сила, направленная къ m , имѣетъ своими проекціями на оси:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \sum_{i=1}^n \varphi_i(\rho_i)^{x-a_i}; \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \sum_{i=1}^n \varphi_i(\rho_i)^{y-b_i},$$

$$Z = \sum_{i=1}^n Z_i, \quad \sum_{i=1}^n \varphi_i(\rho_i)^{z-c_i}.$$

Отсюда для элементарной работы равнодействующей получимъ выражение:

$$\lambda dx + Y dy + Z dz = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\rho_i) \cdot \frac{1}{\rho_i} \{ (x-a_i) dx + (y-b_i) dy + (z-c_i) dz \}$$

Но, дифференцируя (19), находимъ:

$$(x-a_i) dx + (y-b_i) dy + (z-c_i) dz = \rho_i d\rho_i.$$

Следовательно,

$$\lambda dx + Y dy + Z dz = dU = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\rho_i) d\rho_i.$$

Если теперь неопредѣленный интегралъ $\int \varphi_i(\rho_i) d\rho_i$ означимъ черезъ $\Phi_i(\rho_i)$, то очевидно

$$dU = \sum_{i=1}^n d\Phi_i,$$

а потому

$$U = \sum_{i=1}^n \Phi_i. \quad (21)$$

Произвольной постоянной мы не прибавляемъ, такъ какъ она не имѣетъ никакого существеннаго значенія.

Если всё центры притягиваютъ по Ньютонову закону, то по вышесказанному

$$\Phi_1(\rho_1) = -\frac{k^2 m_1}{\rho_1^2};$$

$$\Phi_1 = -\int \frac{k^2 m_1}{\rho_1^2} d\rho_1 = \frac{k^2 m_1}{\rho_1}.$$

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{k^2 m_i}{\rho_i} \quad (22)$$

Если центры притягиваютъ прямопропорціоально стоянїю, то

$$\Phi_1(\rho_1) = -k^2 m_1 \rho_1,$$

$$\Phi_1 = -\int k^2 m_1 \rho_1 d\rho_1 = -\frac{k^2}{2} m_1 \rho_1^2. \quad (23)$$

Для такой же силы отталкивательной нашли бы

$$\Phi_1 = +\frac{k^2}{2} m_1 \rho_1^2. \quad (24)$$

Акъ другой примѣръ возьмемъ силу постоянную

$$X=a; \quad Y=b; \quad Z=c;$$

постоянныя Тогда, очевидно,

$$U = ax + by + cz.$$

Функция точки. Поверхности уровня. Градіентъ или дифференціальный параметръ перваго порядка. Функция силовая и потенциалъ для матеріальной точки принадлежатъ къ числу такъ называемыхъ функций точки, т. е. функций, значения которыхъ зависятъ отъ трехъ координатъ или, короче, отъ положенія точки. Если дана, если намъ дана какая-либо функция точки, то каждой точкѣ пространства соответствуетъ свое

значеніе функции. Та область или тѣ области пространства, въ которыхъ лежатъ точки, дающія функции φ вещественныя и конечныя значенія называются полемъ функции; такъ напр для функции $\varphi = R - x^2 - y^2 - z^2$ полемъ служить объемъ шара радіуса равнаго R съ центромъ въ началѣ координатъ.

Геометрическимъ мѣстомъ точекъ, для которыхъ функция φ принимаетъ одно и тоже значеніе C , служить поверхность:

$$\varphi(x, y, z) = C, \quad (25)$$

называемая поверхностью уровня для данной функции φ . Все поле можетъ быть заполнено сплошнымъ рядомъ бесконечно-близкихъ другъ къ другу поверхностей уровня.

Въ каждой точкѣ поля можно построить векторъ, тѣсно связанный съ данною функцией, а именно векторъ съ такими проекціями на координатныя оси:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

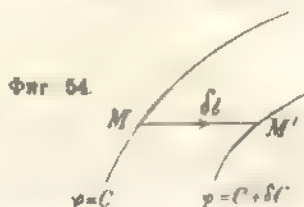
Этотъ векторъ носить названіе градіента или дифференціального параметра перваго порядка отъ данной функции φ ; мы будемъ обозначать его черезъ $\Delta \varphi$; тогда по сказанному:

$$\Delta \varphi \cos(\Delta \varphi, x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \Delta \varphi \cos(\Delta \varphi, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \Delta \varphi \cos(\Delta \varphi, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (26)$$

Отсюда видимъ, что величина градіента такова:

$$\Delta \varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}; \quad (27)$$

а направленіе его совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ нормали къ поверхности уровня, проходящей черезъ рассматриваемую точку.



Если построить семейство поверхностей уровня для различныхъ значеній параметра C , то нетрудно видѣть, что направленіе

градиента идетъ въ ту сторону, въ которую параметры C поверхностей уровня возрастаютъ. Возьмемъ (Фиг. 54) двѣ точки $M(x, y, z)$ и $M'(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$; пусть черезъ M проходитъ поверхность уровня $\varphi = C$, а черезъ M' поверхность: $\varphi = C + \delta C$; следовательно

$$\varphi(x, y, z) = C; \varphi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = C + \delta C.$$

Но

$$C + \delta C = \varphi(x, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z + \dots$$

откуда пользуясь первымъ изъ предыдущихъ равенствъ, находимъ.

$$\delta C = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z.$$

Означимъ длину вектора MM' черезъ δl , тогда

$$\delta x = \delta l \cos(\delta l, x); \delta y = \delta l \cos(\delta l, y); \delta z = \delta l \cos(\delta l, z).$$

а потому изъ (26)

$$\delta C = \Delta \varphi \cdot \delta l \cos(\Delta \varphi, \delta l).$$

Знакъ правой части зависитъ лишь отъ знака косинуса, такъ какъ остальные величины существенно положительныя; отсюда заключаемъ, что при углѣ $(\Delta \varphi, \delta l)$ остромъ $\delta C > 0$, что и доказываетъ вышесказанное.

112. Теорема лорда Кельвина. Пусть δl совпадаетъ съ $\Delta \varphi$; тогда

$$\Delta \varphi = \frac{\delta C}{\delta l}.$$

Станемъ семейство поверхностей уровня строить такъ, чтобы параметры ихъ возрастали всегда на одну и ту же величину, — допустимъ, что $\delta C = \text{const.}$; тогда изъ предыдущаго вы-
скажемъ:

$$\Delta \varphi = \frac{\text{const.}}{\delta l}.$$

Оказывается, что при такомъ способѣ построенія поверхностей уровня величины дифференціальныхъ параметровъ первого рода обратно пропорціональны разстоянію δl между смежными поверхностями (теорема лорда Кельвина).

Если построимъ семейство кривыхъ, ортогональныхъ къ поверхностямъ уровня, то по (26) касательныя къ этимъ кривымъ опредѣляютъ собою направление градиента. Дифференціальныя уравненія разсматриваемыхъ кривыхъ, очевидно, будутъ:

$$\frac{dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}. \quad (28)$$

113. Производная отъ функций точки по данному направлению. Проведемъ черезъ взятую точку $M(x, y, z)$ какое нибудь направление, характеризуемое своими косинусами α, β, γ ; возьмемъ другую точку $M(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$, лежащую на построенной прямой и отстоящую отъ M на бесконечно маломъ разстояніи δl .

Если M не принадлежитъ къ числу особенныхъ точекъ функции φ , то значеніе φ для $M + \delta$ будетъ бесконечно мало отличаться отъ значенія этой функции въ M . Разсмотримъ предѣлъ отношенія

$$\frac{\delta \varphi}{\delta l},$$

въ томъ предположеніи, что M сливается съ M . Замѣтимъ, что

$$\delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z,$$

гдѣ

$$\delta x = \alpha \delta l; \delta y = \beta \delta l; \delta z = \gamma \delta l.$$

А потому,

$$\text{пред.} \left(\frac{\delta \varphi}{\delta l} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \gamma.$$

Предѣлъ этотъ и носить названіе значенія для точки M производной отъ функции φ по направленію l . Производную, взятую такимъ образомъ, обозначаютъ $\frac{d\varphi}{dl}$, слѣд.

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \gamma. \quad (29)$$

На основаніи сказаннаго величину градиента, мы можемъ опредѣлять, какъ производную отъ данной функции по направле-

на положительной нормали къ соответственной поверхности уровня. Въ самомъ дѣлѣ, тогда

$$\frac{d\varphi}{dn} = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} = \Delta\varphi,$$

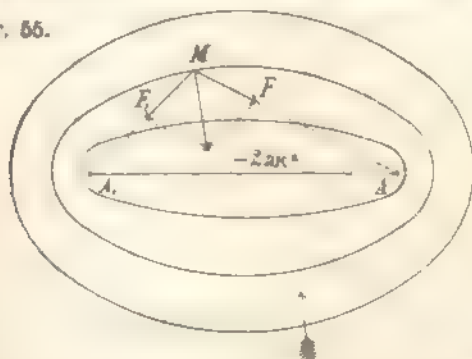
какъ въ выраженіи (29) надо положить:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad \beta = \frac{1}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad \gamma = \frac{1}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

114. Свойства силовой функціи, какъ функціи точки. Приложимъ названное въ предыдущихъ параграфахъ къ силовой функціи. Пусть силовой функціи представитъ собою равнодѣйствующую сила, которая была бы приложена къ движущейся точкѣ, если бы точка занимала рассматриваемое положеніе. Когда масса движущейся точки равна единицѣ (грамму), то равнодѣйствующую на нее напряженіемъ поля въ рассматриваемой точкѣ, напряженіе поля равно производной отъ силовой функціи по направлению положительной нормали къ соответственной поверхности уровня. Производная отъ силовой функціи по какому-либо направлению равна проекціи на это направленіе напряженія. Когда построено семейство поверхностей уровня съ равноувѣснѣвающими параметрами, то по теоремѣ лорда Кельвина напряженіе поля тамъ больше, гдѣ поверхности уровня тѣснѣе расположены другъ относительно друга.

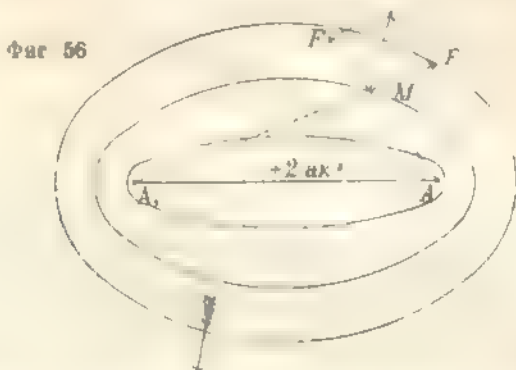
Уравненія (28) носятъ въ этомъ случаѣ названіе силовыхъ уравненій, такъ какъ по предыдущему, касательныя къ нимъ представляютъ собою направленіе силы или напряженія поля.

Фиг. 55.



Рассмотримъ расположеніе поверхностей уровня для двухъ постоянныхъ по величинѣ, имѣющихъ схожими источниками

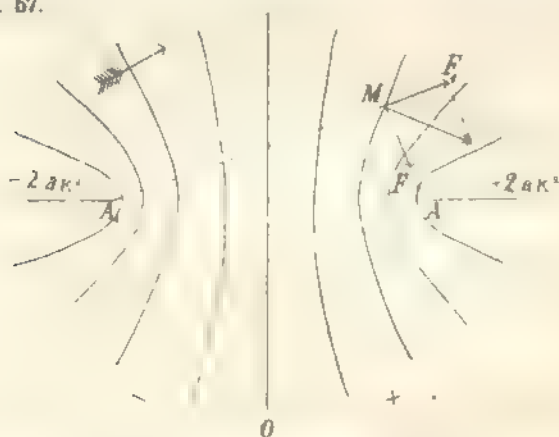
неподвижные центры. Возьмемъ за начало координатъ середину разстоянія между центрами A и A_1 (Фиг. 55, 56, 57 и 58) и примемъ эту прямую за ось x -овъ. Тогда, если $AA_1 = 2a$, координатами центровъ будутъ для A : $a, 0, 0$; для A_1 : $-a, 0, 0$.



На точку m массы, равной единицѣ, помещенную въ положеніе (x, y, z) , дѣйствуютъ двѣ силы F и F_1 , равныя по условію между собою:

$$F = F_1 = k^2.$$

Фиг. 57.



Направленіе же силъ F и F_1 зависитъ отъ того, какъ дѣйствуютъ центры притягательно или отталкивательно. Поэтому разберемъ 4 случая: 1) F и F_1 —силы притягательныя; 2) F и F_1 —силы отталкивательныя; 3) F —сила притягательная, F_1 —отталкивательная; 4) F —сила отталкивательная, F_1 —притягательная.

Въ первомъ случаѣ, очевидно, имѣемъ:

$$\cos(F, x) = \frac{x-a}{\rho}; \cos(F, y) = -\frac{y}{\rho}; \cos(F, z) = -\frac{z}{\rho};$$

$$\cos(F_1, x) = -\frac{x-a}{\rho_1}; \cos(F_1, y) = -\frac{y}{\rho_1}; \cos(F_1, z) = -\frac{z}{\rho_1};$$

$$-a = MA, \rho_1 = MA_1, \text{ т. е.}$$

$$\rho^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2; \rho_1^2 = (x+a)^2 + y^2 + z^2.$$

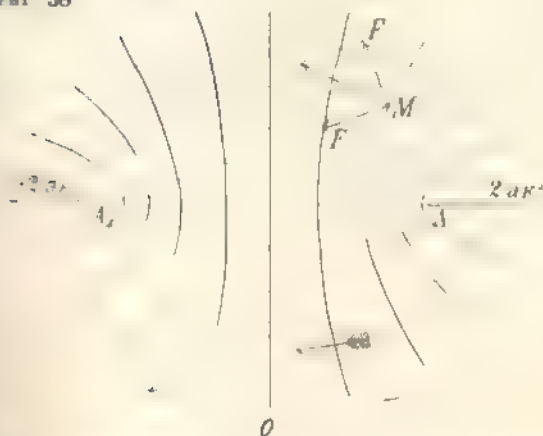
Его проекции напряженія поля на координатныя оси будутъ:

$$X = -k^2 \frac{x-a}{\rho} - k^2 \frac{x+a}{\rho_1};$$

$$Y = -k^2 \frac{y}{\rho} - k^2 \frac{y}{\rho_1};$$

$$Z = -k^2 \frac{z}{\rho} - k^2 \frac{z}{\rho_1}.$$

Фиг. 58



Найдемъ такое выраженіе для дифференціала силовой

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz = -k^2 d\rho - k^2 d\rho_1,$$

или, имѣя въ виду,

$$U = -k^2 \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right),$$

(34)

Подобнымъ образомъ найдемъ для второго случая:

$$U = k^2(\rho + \rho_1); \quad (31)$$

для третьяго:

$$U = k^2(\rho_1 - \rho); \quad (32)$$

и для четвертаго:

$$U = k^2(\rho - \rho_1); \quad (33)$$

Поверхностями уровня въ первыхъ двухъ случаяхъ служатъ софокусныя эллипсоиды вращения вокругъ прямой AA_1 . Фокусы совпадаютъ съ действительными центрами. Въ первомъ случаѣ параметры поверхностей уровня измѣняются отъ $-\infty$ (безконечно большая сфера) до $-2ak^2$ (отрѣзокъ AA_1); во второмъ случаѣ предѣлами для параметровъ служатъ $2ak^2$ (отрѣзокъ AA_1) и $+\infty$ (безконечно большая сфера).

Въ послѣднихъ двухъ случаяхъ, поверхности служатъ софокусныя двуполныя гиперболоиды вращения вокругъ оси AA_1 , причемъ каждой полѣ поверхности соответствуетъ свой параметръ. Въ общихъ случаяхъ параметры измѣняются между $-2ak^2$ и $-2ak^2$. Параметру 0 соответствуетъ плоскость, перпендикулярная къ AA_1 и дѣлящая AA_1 пополамъ. Предѣльному значенію параметра $2ak^2$ въ третьемъ случаѣ соответствуетъ отрѣзокъ оси x -овъ, идущій отъ A къ $-\infty$, а въ четвертомъ случаѣ отрѣзокъ оси x -овъ, идущій отъ A_1 къ $-\infty$. Значенію параметра $-2ak^2$ въ третьемъ случаѣ соответствуетъ отрѣзокъ отъ A_1 до $-\infty$, а въ четвертомъ отъ A до $-\infty$.

На фиг. 55, 56, 57 и 58 изображены меридіанальныя сѣченія разсмотрѣнныхъ поверхностей плоскостью AA_1M . Стрѣлкою указано направление, въ которомъ параметры поверхностей уровня возрастаютъ.

Силовыми линиями въ разобранныхъ случаяхъ будутъ кривыя второго порядка, софокусныя съ меридіанами поверхностей уровня и, конечно, лежація въ одной и той же меридіанальной плоскости.

ГЛАВА XIII.

Центральныя орбиты.

§ 145. Движеніе точки подѣ дѣйствиемъ центральной силы. Функции постоянныя. Сила, имѣющая своимъ источникомъ неподвижный пунктъ, имѣетъ названіе центральной. Для матеріальной точки, движущейся подѣ дѣйствиемъ центральной силы, мы можемъ вывести три первыхъ интеграла (§ 107) интегралы плоскіе выражаютъ постоянство секторіальной скорости точки движущейся въ плоскости взаимно ортогональныхъ осей, проведенныхъ черезъ центръ. Такъ, если центръ помѣщенъ въ началѣ координатъ, а радиусъ-векторъ движущейся точки (x, y, z) съ массею m имѣетъ ρ , то дифференціальныя уравненія движенія будутъ

$$\left. \begin{aligned} X &= F \frac{x}{\rho}; \quad my'' = -F \frac{y}{\rho}; \quad m\ddot{z} = F \frac{z}{\rho}, \end{aligned} \right\}$$

гдѣ F — центральная сила. Отсюда видимъ, что

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Следовательно

$$C_1 = m(xx' - x'x') = C_2; \quad m(xy' - yx') = C_3; \quad (1)$$

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0. \quad (2)$$

Въ (1) и (2) означимъ произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, C_3 и назовемъ (2) уравненіемъ плоскости траекторіи или орбиты, слѣд. выраженіе

$$\frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{y} + \frac{C_3}{z} = 0$$

равно косинусу угла наклоненія плоскости орбиты къ плоскости xOy . Положимъ въ уравненіи (2) z равнымъ нулю, тогда получимъ:

$$C_1^2 + C_2^2 = 0.$$

уравнение прямой, слѣда плоскости орбиты на плоскости xOy . Эту линію обыкновенно называютъ въ Астрономіи линіею узловъ. Изъ написаннаго уравненія вытекаетъ, что

$$-\frac{C_1}{C_2} = \tan i,$$

гдѣ i уголъ узловой линіи съ нѣкоторымъ постояннымъ направле-
ніемъ въ плоскости xOy (осью x -овъ). Наконецъ максимальная
секторіальная скорость равна моменту количества движенія точки
вокругъ центра, раздѣленному на массу, т. е.

$$\frac{1}{m} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = C_3 = v_0 \rho_0 \sin(\epsilon_0, \rho_0),$$

если v начальная скорость точки, а ρ — начальный радіусъ вектора.

Такъ какъ движеніе плоское то отнесемъ положеніе точки къ
полярнымъ координатамъ ρ, θ въ плоскости орбиты. Тогда имѣемъ:

$$\rho^2 \theta' = A = \frac{1}{m} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = C_3 = v_0 \rho_0 \sin(\epsilon_0, \rho_0). \quad (3)$$

Если центральная сила функция только разстоянія между
движущеюся точкою и центромъ, вопросъ о движеніи точки рѣ-
шается съ помощью двухъ квадратуръ. Действительно, пусть

$$F = mf(\rho),$$

въ такомъ случаѣ, означивъ $\int f(\rho) d\rho$ черезъ $\Phi(\rho)$, находимъ (§ 111).

$$U = m \Phi(\rho),$$

и слѣд. получаемъ интеграль живои силы:

$$\rho'^2 + \rho^2 \theta'^2 = 2\Phi(\rho) + 2h, \quad (4)$$

гдѣ $h = C_4$, четвертой произвольной постоянной.

Исключивъ время изъ (3) и (4), найдемъ дифференціальное уравненіе траекторіи. Съ этою цѣлью замѣчаемъ, что

$$\rho = \frac{d\varphi}{dt} b,$$

замѣняемъ вездѣ b его значеніемъ изъ (3), тогда (4) намъ даетъ.

$$\frac{A^2 d\rho^2}{\rho^4 dt^2} + \frac{A^2}{\rho^2} = 2\Phi(\rho) + 2h. \quad (5)$$

$$\rho^2 \sqrt{2\Phi(\rho) + 2h - \frac{A^2}{\rho^2}} dt = A d\rho$$

отсюда, интегрируя, находимъ уравненіе траекторіи

$$\int \frac{A d\rho}{\rho^2 \sqrt{2\Phi(\rho) + 2h - \frac{A^2}{\rho^2}}} = 0 \quad C_1.$$

Возвращаясь къ (3), получаемъ:

$$\sqrt{2\Phi(\rho) + 2h - \frac{A^2}{\rho^2}} = \frac{d\rho}{dt},$$

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{2\Phi(\rho) + 2h - \frac{A^2}{\rho^2}}} = t + C_2,$$

т. е. время, что и заканчиваетъ интегрированіе.

§ Измененіе подѣйствию притяженія по Ньютону закону.

Въ этомъ случаѣ притягательная и обратнопропорціональная квадрату

расстоянія, т. е. по условію, сдѣланному въ § 111:

$$I = \frac{k}{\rho^2},$$

и слѣд. по (22) § 111:

$$l' = \frac{k^2 m}{\rho}.$$

Дифференціальное уравненіе траекторіи (5) приметъ теперь видъ:

$$\frac{A^2}{\rho^4} \cdot \frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \frac{A^2}{\rho^2} = \frac{2h}{\rho} - 2h. \quad (11)$$

Постоянныя $2h$ и A по (4) и (3), такъ выразятся черезъ начальныя условія:

$$2h = v_0^2 = \frac{2k'}{\rho_0}; \quad (12)$$

$$A = v_0 \rho_0 \sin(\rho_0, v_0).$$

Полагаемъ временно:

$$z = \frac{A}{\rho}; \quad (13)$$

тогда изъ (6) получаемъ:

$$\frac{dz^2}{d\theta^2} - 2h = \frac{2k^2}{A} z - z' - 2h = \frac{k^2}{A^2} = \left(z - \frac{k^2}{A}\right). \quad (14)$$

Пусть

$$2h + \frac{k^2}{A^2} = \frac{k^2}{A^2} e^2. \quad (15)$$

Легко убѣдиться, что сумма эта не можетъ быть отрицательною. На самомъ дѣлѣ по (7)

$$2h + \frac{k^2}{A^2} = v_0^2 - \frac{2k^2}{\rho_0^2} + \frac{k^2}{\rho_0^2 v_0^2 \sin^2(\rho_0, v_0)} \geq \left(1 - \frac{k^2}{\rho_0^2 v_0^2}\right).$$

Изъ (10) вытекаетъ:

$$2h = \frac{k^2}{A^2} (e^2 - 1)$$

и слѣдовательно

если $h > 0$, то $e > 1$;

если $h = 0$, то $e = 1$;

$$h = 0, \quad e = 1.$$

Возвращаясь къ (9), находимъ:

$$\int \frac{h'}{A'} e' - \left(z - \frac{k'}{A} \right) d\theta.$$

Можно такъ считать полярный уголъ, чтобы въ началѣ счѣта производная $\frac{dz}{d\theta}$ была отрицательна. Тогда, сохранивъ знакъ, интегрируемъ:

$$\arccos \frac{h}{k' - A} = \theta + C.$$

Въведемъ z его выраженіемъ (8) и переходимъ къ обратнымъ:

$$\frac{A}{\rho} = \frac{k'}{A} - \frac{k^2}{A} e \cos(\theta + C_s),$$

и получается искомое уравненіе траекторіи:

$$\rho = \frac{A^2}{k'} \frac{1}{e \cos(\theta + C_s)}. \quad (11)$$

Эта кривая второго порядка, отнесенная къ фокусу.

Постоянная e представляетъ собою эксцентриситетъ кривой.

Рассмотримъ ρ . Для эллипса и гиперболы:

$$\frac{A^2}{k^2} = p = a(1 - e^2) = a(e^2 - 1), \quad (12)$$

где a — полуось эллипса, а $2a$ длина сѣкущей оси гиперболы.

Для $\theta = C_s$ радиусъ векторъ получаетъ наименьшее значеніе, то $C_s = \theta_n$, гдѣ θ_n координата той точки, которая лежитъ ближе всѣхъ къ центру притяженія.

Въ Астрономіи такую точку называютъ перигелиемъ, если дѣло идетъ о движеніи кометы или планеты вокругъ солнца. а уголъ $\psi = \theta - \theta_0$ представляющій собою угловое разстояніе планеты отъ перигелия, носитъ названіе истинной аномаліи.

Чтобы окончить задачу, остается опредѣлить зависимость истинной аномаліи отъ времени. По (5), (11) и (12), замѣчая, что $d\psi = d\theta$, находимъ:

$$\frac{d\psi}{(1 - e \cos \psi)^2} = \frac{h^2}{A^3} dt = \frac{h}{p^{3/2}} dt. \quad (13)$$

Вмѣсто ψ вводимъ новую переменную τ , полагаемъ

$$\tau = \frac{\psi}{2}$$

или

$$\psi = 2 \operatorname{arctg} \tau,$$

и слѣдовательно

$$d\psi = \frac{2 d\tau}{1 + \tau^2}.$$

Такъ какъ

$$\cos \frac{\psi}{2} = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2},$$

то послѣ сокращеній получаемъ:

$$\frac{d\psi}{(1 + e \cos \psi)^2} = \frac{2}{(1 - e^2)^{3/2}} \frac{(1 - \tau^2) d\tau}{(1 + \tau^2)^3} = \frac{2}{(1 + e)^2} \frac{(1 + \tau^2) d\tau}{(1 + \gamma \tau^2)^2}, \quad (14)$$

гдѣ

$$\gamma = \frac{1 - e}{1 + e}.$$

Для параболы $e = 1$, слѣд. $\gamma = 0$, а потому изъ (13) и (14):

$$1 - \tau^2 = \frac{2h}{p^{3/2}} dt.$$

Тогда послѣ интегрированія

$$\frac{2h}{p^{3/2}}(t - \tau) = \eta + \frac{1}{8}\eta^3 = tg \frac{\psi}{2} - \frac{1}{8}tg^3 \frac{\psi}{2}.$$

Произвольная постоянная τ равна времени прохода точки перигелия ($\psi = 0$).

Когда γ отлично от нуля, то замѣчаемъ, что

$$\frac{1}{\gamma} \frac{(1 - \gamma\eta^2)}{(1 + \gamma\eta^2)^2} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + \gamma\eta^2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{(1 + \gamma\eta^2)^2},$$

такъ что

$$\int \frac{1 - \gamma\eta^2}{(1 + \gamma\eta^2)^2} d\eta = \frac{1}{\gamma} \int \frac{d\eta}{1 + \gamma\eta^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \int \frac{d\eta}{(1 + \gamma\eta^2)^2}. \quad (15)$$

Этотъ интегралъ можно свести къ интегралу, ему предшествующему. Съ этою цѣлью интегрируемъ по частямъ

$$\int \frac{d\eta}{1 + \gamma\eta^2},$$

получимъ

$$\int \frac{d\eta}{1 + \gamma\eta^2} = \frac{\eta}{1 + \gamma\eta^2} + 2\gamma \int \frac{\eta^2 d\eta}{(1 + \gamma\eta^2)^2} = \frac{\eta}{1 + \gamma\eta^2} + 2\gamma \int \frac{d\eta}{1 + \gamma\eta^2} - 2\gamma \int \frac{d\eta}{(1 + \gamma\eta^2)^2}.$$

откуда

$$\frac{d\eta}{1 + \gamma\eta^2} = \frac{1}{2} \frac{\eta}{1 + \gamma\eta^2} + 2\gamma \int \frac{d\eta}{1 + \gamma\eta^2}.$$

Слѣдовательно (15) принимаетъ видъ

$$\int \frac{1 - \gamma\eta^2}{(1 + \gamma\eta^2)^2} d\eta = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\eta}{1 + \gamma\eta^2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \int \frac{d\eta}{1 + \gamma\eta^2}.$$

Воспользовавшись этимъ равенствомъ и (14), изъ (13) получаемъ:

$$\frac{k}{r} (t - \tau) = \frac{1}{(1 - e)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{1 - \gamma r^2} - \frac{1}{1 - \gamma r_0^2} + \frac{1}{1 - \gamma r_0^2} \int_{r_0}^r \frac{dr}{1 - \gamma r^2} \right\},$$

гдѣ произвольная постоянная τ представляетъ собою время прохождения черезъ перигей ($r = 0$).

Такъ какъ

$$\gamma - 1 = -\frac{2e}{1 - e}; \quad \gamma + 1 = \frac{2}{1 - e},$$

то предыдущее равенство можемъ переписать такъ:

$$\frac{k}{r} (t - \tau) = \frac{2}{(1 - e)(1 - e^2)} \left\{ \int_{r_0}^r \frac{d\eta}{1 - \gamma r^2} - e \frac{\eta}{1 - \gamma r^2} \right\}. \quad (16)$$

Для эллипса $e < 1$, слѣд. $\gamma < 0$, а потому

$$\int \frac{dr}{1 - \gamma r^2} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arctg} (r \sqrt{\gamma}).$$

Вводимъ новую переменную f , полагая

$$f = 2 \operatorname{arctg} (r \sqrt{\gamma}).$$

т. е.

$$r \sqrt{\gamma} = \tan \frac{f}{2}.$$

Тогда очевидно

$$\frac{2\eta}{1 + \gamma r^2} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \frac{\sin \frac{f}{2} \cos \frac{f}{2}}{1 - \sin^2 \frac{f}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sin f.$$

А потому изъ (16):

$$\frac{k}{r} (t - \tau) = -\frac{1}{(1 - e)(1 - e^2) \sqrt{\gamma}} (1 - e \sin f).$$

ставляя здѣсь γ его значеніемъ и подставляя вмѣсто r выраженіе (12), послѣ сокращенія на $(1 - e^2)^{-2}$, находимъ окончательный эллипса:

$$\sqrt{a^3} (t - \tau) = f - e \sin f.$$

Здѣсь f называется въ Астрономіи эксцентрической аномаліей.

Для гиперболы $e > 1$, слѣдов. $\gamma < 0$, поэтому интеграль въ (16) находимъ такъ:

$$\int \frac{dr}{1 - \gamma r^2} = \frac{1}{2\sqrt{-\gamma}} \log \frac{1 + r\sqrt{-\gamma}}{1 - r\sqrt{-\gamma}}.$$

Если теперь положить

$$r\sqrt{-\gamma} = \operatorname{tg} \frac{F}{2},$$

$$\frac{1 + r\sqrt{-\gamma}}{1 - r\sqrt{-\gamma}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{F}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{F}{2}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{F}{2} \right);$$

$$\frac{r}{1 - \gamma r^2} = \frac{1}{1 - \gamma} \frac{\operatorname{tg} \frac{F}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{F}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{-\gamma}} \operatorname{tg} F.$$

Подставляя въ (16) найдемъ:

$$\frac{1}{1 - e(1 - e^2)\sqrt{-\gamma}} \left[\log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{F}{2} \right) - e \operatorname{tg} F \right].$$

Возвратимся снова (12) и замѣнимъ γ его значеніемъ; тогда сокращенія на $(e^2 - 1)^{3/2}$ находимъ окончательно для гипер-

$$\sqrt{a^3} (t - \tau) = e \operatorname{tg} F - \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{F}{2} \right).$$

117. Формула Бине. Въ заключеніе настоящей главы покажемъ, какъ въ общемъ случаѣ, пользуясь интеграломъ площадей, получить дифференціальное уравненіе второго порядка для центральной орбиты (формулу Бине).

Пусть величина центральной силы F . По условію § 111 $F = 0$ для отталкиванія и $F < 0$ для притяженія. Интегралъ площадей въ полярныхъ координатахъ r и θ будетъ:

$$r^2 \theta' = A. \quad (17)$$

Возьмемъ проекціи силы F на ось μ полярныхъ координатъ (§ 39). По (4) § 98 имѣемъ:

$$F \cos(F\mu) = F = m(r'' - r\theta'^2).$$

Станемъ разсматривать r , какъ функцію отъ θ ; тогда по (17)

$$r = \frac{dr}{d\theta} \theta' = \frac{A}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -A \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r}.$$

Дифференцируемъ еще разъ подобнымъ же образомъ:

$$r'' = -A \frac{d}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} = -A \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} = -\frac{A^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r}.$$

Такимъ образомъ оказывается, что

$$\frac{1}{m} F = -\frac{A^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} - \frac{A^2}{r^3}$$

или

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mA^2}. \quad (18)$$

Полученная формула Бине чаще всего служить для опредѣленія закона измѣненія силы по данному уравненію центральной орбиты, но можетъ быть примѣнена и къ рѣшенію обратнаго вопроса.

Примеры: а) Точка движется подъ действиемъ центральной силы по эллиптической спирали. Найти законъ притяжения или отталкиванія, если θ — радиальный центр въ асимптотической точкѣ кривой.

Сравненіе траекторій:

$$r = a e^{\lambda \theta},$$

а λ и a — некоторые постоянныя.

Вычисляемъ производную:

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{\lambda^2}{a} - \frac{\lambda \theta}{r}.$$

Подставляя въ (18) находимъ:

$$F = - \frac{m A^2 (\lambda^2 + 1)}{r^3} = - \frac{C^2}{r^3}.$$

Значитъ, притягательная, обратнопропорціональная кубу разстоянія.

Найти орбиту для притяженія по закону Ньютона. Въ разсмотрѣнномъ случаѣ

$$F = - \frac{k \cdot m}{r^2}.$$

Значитъ формула (18) даетъ такое дифференціальное уравненіе орбиты:

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{k}{A^2}.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ интеграломъ этого линейнаго дифференціального уравненія

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + \frac{k^2}{A^2},$$

а C_1 и C_2 постоянныя произвольныя, или

$$\frac{1}{r} = \frac{k^2}{A^2} + \frac{k^2}{A^2} D \cos (\theta + E).$$

Значитъ E новая постоянная произвольная. Отсюда искома орбита

$$r = \frac{A^2}{k^2} \left(1 + D \cos (\theta + E) \right),$$

гдѣ r — разстояніе, отнесенное къ фокусу.

ГЛАВА XIV.

Дифференціальныя уравненія движенія несвободной точки.

118. Кинематическія связи удерживающія и недерживающія. Матеріальная точка называется свободною тогда, когда она может занимать произвольное положеніе въ пространствѣ. Если же заранѣе дано то геометрическое протяженіе, въ предѣлахъ котораго должна двигаться разсматриваемая точка, тогда самую точку называютъ несвободною, а условия, стѣсняющія ея свободу кинематическими связями.

Данное геометрическое протяженіе можетъ быть объемомъ, поверхностью или линіей.

Пусть несвободная точка не можетъ покидать даннаго объема. Поверхность, ограничивающая этотъ объемъ, вообще говоря, подвижная и переменной формы (деформирующаяся), поэтому въ общемъ случаѣ уравненіе ея имѣетъ видъ:

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad (1)$$

если возьмемъ систему декартовыхъ координатъ.

Мы условимся, развѣ навсегда, такъ писать предыдущее уравненіе, чтобы для возможныхъ положеній точки лѣвая часть была положительною. Тогда аналитическимъ выраженіемъ для связи, наложенной на матеріальную точку, служить неравенство

$$f(x, y, z, t) \geq 0. \quad (2)$$

Связь такого рода носитъ названіе связи недерживающей. Когда точка движется по границѣ объема, по поверхности (1), т. е. когда лѣвая часть (2) равна нулю, говорятъ, что связь находится въ состояніи напряженія или связь дѣйствуетъ. Когда точка внутри объема, т. е. когда лѣвая часть (2) больше нуля, говорятъ, что связь ослабла или не дѣйствуетъ.

Примеры: а) Точка может двигаться лишь внутри сферы радиуса R с центром в начале координат. Такая связь выразится неравенством:

$$R^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0.$$

Если же точка может двигаться только вне вышеупомянутой сферы — аналогическим выражением связи будет неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 > 0.$$

б) Неравенство:

$$A^2 t^2 - \frac{(x - at)^2}{a^2} - \frac{(y - bt)^2}{b^2} - \frac{(z - ct)^2}{c^2} \geq 0.$$

означает, что точка должна двигаться внутри эллипсоида, центр которого движется прямолинейно и равномерно со скоростью $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Если эллипсоид возрастает пропорционально времени, слѣд. онъ увеличивается, оставаясь себѣ подобнымъ.

Когда точка должна двигаться по данной поверхности, то слѣдующимъ типомъ уравненія связи будетъ:

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (3)$$

Время войдетъ явно, если данная поверхность подвижная или вращающаяся. Связь, выражаемая равенствомъ (3), называется связью удерживающею.

Примеръ: уравненіе:

$$Ax + By + Cz + Dt + E = 0,$$

гдѣ A, B, C, E — постоянныя, требуетъ, чтобы точка не покидала некоторой плоскости. Плоскость эта, оставаясь параллельною своему первоначальному положенію, т. е. двигаясь поступательно, удаляется равномерно отъ своего начальнаго положенія:

$$Ax + By + Cz + F = 0.$$

Если точка не можетъ покидать въ некоторой кривой, то обстоятельство это выразится двумя равенствами:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, t) &= 0; \\ f_2(x, y, z, t) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Время войдетъ явно, когда данная кривая неподвижна и вращающаяся. Такъ какъ рассматриваемая связь выражается двумя равенствами типа (3), то говорить, что въ этомъ случаѣ имѣется двѣ удерживающія связи.

Примѣръ: Уравненія:

$$x^2 + y^2 - z^2 - R^2 = 0; \quad x - R \sin t = 0,$$

показываютъ, что точка движется на окружности. Центръ этой окружности совершаетъ простое гармоническое движение, а радиусъ периодически измѣняется отъ нуля до R .

Разсматривать одновременно три удерживающія связи не представляется необходимости. Пусть эти связи будутъ:

$$f_1(x, y, z, t) = 0, \quad f_2(x, y, z, t) = 0, \quad f_3(x, y, z, t) = 0. \quad (5)$$

Если между лѣвыми частями написанныхъ уравненій не существуетъ зависимости вида:

$$H(f_1, f_2, f_3, t) = 0, \quad (6)$$

то поверхности (5) пересѣкаются въ одной или нѣсколькихъ дискретныхъ точкахъ (вещественныхъ или мнимыхъ); слѣд. положеніе движущейся точки извѣстно для каждаго момента времени, или точка не можетъ одновременно лежать на всѣхъ поверхностяхъ (5). Когда же существуетъ зависимость вида (6), то при $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ изъ (6) вытекаетъ либо $f_3 = 0$, либо $f_3 = c(t)$, отличной отъ нуля. Въ первомъ случаѣ связь f_3 была бы слѣдствіемъ связей f_1 и f_2 , а во второмъ случаѣ связь f_3 противорѣчила бы первымъ двумъ.

Примѣръ: Лѣвыя части уравненій:

$$f_1 = x^2 + y^2 - z^2 - R^2 = 0;$$

$$f_2 = x - y - z - R \cos \alpha = 0;$$

$$f_3 = (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 - 3a^2 = 0;$$

удовлетворяютъ соотношенію

$$f_3 - f_1 + 2a f_2 - R(R - 2a \cos \alpha) = 0.$$

Слѣд. при $a = \frac{1}{2} R \sec \alpha$ эти связи могутъ быть замѣнены двумя; при другомъ значеніи для a связи будутъ противорѣчными.

Приходится иногда разсматривать одновременно двѣ, три и болѣе неудерживающихъ связи въ томъ случаѣ, когда объемъ, предоставленный для движенія матеріальной точки, ограниченъ не одною, а нѣсколькими поверхностями.

Примѣры: а) Связи:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \cos^2 \alpha > 0; \quad R - x^2 - y^2 - z^2 > 0;$$

представляют для движенья точки объемъ между двумя концентрическими сферами радиусовъ R и $R \cos \alpha$.

б) Связи:

$$R^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0;$$

$$4 R^2 - x^2 \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{z^2}{\sin^2 \alpha} > 0$$

предоставляютъ для точки объемъ, ограниченный кулями сферъ и эллипсоидомъ.

Двѣ одновременныхъ связи удерживающая и не удерживающая предоставляютъ для движенья точки некоторую ограниченную часть поверхности.

Примѣры: а) При связяхъ:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0;$$

$$z - R \cos \alpha \geq 0.$$

материальная точка можетъ двигаться по поверхности сегмента съ высотой $R \cos \alpha$.

б) При связяхъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0;$$

$$R \cos \alpha - z > 0,$$

точка движется по сферическому полюсу съ высотой $2 R \cos \alpha$.

Число не удерживающихъ связей и здѣсь можетъ быть произвольной, если граница поверхности состоитъ изъ нѣсколькихъ аналитически отличныхъ одна отъ другой.

Примѣры: Связи:

$$x^2 + y^2 - z^2 - R^2 = 0;$$

$$x \geq 0; y > 0; z \geq 0;$$

материальная точка можетъ двигаться лишь внутри равносроронняго и равноугорьянаго октантн треугольника.

§ 120. Условіе, налагаемое на скорость несвободной точки удерживающей связью. Пусть матеріальная точка находится на удерживающей связи (3) лѣвую часть уравненія (3), зависящую отъ времени t и неявно, означимъ для сокращенія черезъ $F(t)$.

Разсмотримъ два смежныхъ момента времени t и $t + \Delta t$. Такъ какъ точка въ оба эти момента должна лежать на связи, то

$$F(t) = 0; F(t + \Delta t) = 0;$$

а потому

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = 0,$$

каковъ бы ни былъ промежутокъ времени Δt . Положимъ Δt безконечно малымъ; тогда приходимъ отъ предыдущаго равенства къ такому, справедливому для любого момента t :

$$\text{Пред. } \left\{ \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \right\}_{\Delta t = 0} = \frac{dF}{dt} = \frac{df}{dt} = 0, \quad (7)$$

гдѣ, какъ всегда, прямыми буквами означены полныя производныя по времени.

Разсуждая такимъ же образомъ относительно функціи $\frac{df}{dt} = \varphi(t)$, получаемъ:

$$\varphi(t) = 0; \varphi(t + \Delta t) = 0;$$

$$\frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = 0;$$

при всякомъ t , а при Δt безконечно маломъ:

$$\text{Пред. } \left\{ \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \right\}_{\Delta t = 0} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2f}{dt^2} = 0. \quad (8)$$

Тѣмъ же путемъ мы можемъ идти и дальше, но въ этомъ нѣтъ нужды. Полученныя равенства (7) и (8) выражаютъ собою тѣ условія, которыя налагаются на скорость и ускореніе несвободной точки удерживающею связью.

Раскрывая (7), находимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (9)$$

если запятою означимъ производныя по времени.

Замѣтимъ, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \Delta f \cos(\Delta f, x); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \Delta f \cos(\Delta f, y); \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \Delta f \cos(\Delta f, z); \quad (10)$$

$$x = r \cos(v, x), \quad y = r \cos(v, y), \quad z = r \cos(v, z),$$

гдѣ Δf означаетъ дифференціальный параметръ перваго порядка или градиентъ функціи f (§ 111), а v — скорость движущейся точки. Тогда вмѣсто (9) можемъ написать:

$$\Delta f \cdot v \cos(v, \Delta f) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Мы видимъ, что ограниченію подлежитъ лишь составляющая скорости вдоль по градиенту; эта составляющая должна имѣть опредѣленную величину для даннаго момента времени и даннаго положенія точки:

$$v \cos(v, \Delta f) = - \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (12)$$

Что же касается до составляющей v въ плоскости перпендикулярной къ Δf , то она можетъ быть вполне произвольною.

Когда $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, т. е. связь явно не зависитъ отъ времени, то равенство (11) даетъ

$$v \cos(v, \Delta f) = 0$$

или

$$v \perp \Delta f. \quad (13)$$

Полученное условіе очевидно, оно требуетъ, чтобы скорость точки, движущейся по неподвижной поверхности неизмѣннаго вида, была въ плоскости касательной къ этой поверхности.

120. Условіе, налагаемое на ускореніе несвободной точки удерживающею связью. Обращаясь къ выраженію 8) и раскрывая его, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z''$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} z'^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} y' z' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} z' x' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} x' y' \\
+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} x' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} y' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z} z' + \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned} \quad (14)$$

Здѣсь

$$x' = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \cos(\dot{\varphi}), \quad y' = \dot{y} \cos(\varphi), \quad z' = \dot{z} \cos(\dot{\varphi}),$$

если $\dot{\varphi}$ ускореніе точки.

Поэтому, пользуясь (10), можемъ предъидущему равенству (14) дать видъ:

$$\Delta f \dot{\varphi} \cos(\dot{\varphi} \Delta f) + D_2 f = 0. \quad (15)$$

Символъ $D_2 f$ означаетъ тутъ послѣднія три строки выраженія (14).

Опять оказывается, что существованіе связи налагаетъ ограниченіе только на составляющую ускоренія точки вдоль дифференціального параметра связи:

$$\dot{\varphi} \cos(\dot{\varphi} \Delta f) = -\frac{1}{\Delta f} D_2 f.$$

Составляющая же ускоренія въ плоскости, перпендикулярной къ Δf , ничѣмъ не опредѣляется.

Относительно состава $D_2 f$ замѣтимъ, что это выраженіе содержитъ въ себѣ члены трехъ родовъ: въ одни скорости входятъ во второй степени, другіе содержатъ скорости линейнымъ образомъ и наконецъ третьи свободны отъ скоростей. Когда $\frac{df}{dt} = 0$, члены послѣднихъ двухъ категорій отсутствуютъ и $D_2 f$ обращается въ квадратную однородную функцію скоростей. Замѣтимъ, что по вышнему виду условіе (15) не измѣнится въ разсматриваемомъ случаѣ, противоположно тому, какъ это было съ условіемъ (11) относительно скорости.

121. Условія, налагаемыя на скорость и ускореніе несвободной точки неудерживающею связью. Положимъ теперь, что свобода материальной точки стѣснена неудерживающею связью (2)

Когда связь эта ослаблена (§ 118):

$$f(x, y, z, t) > 0;$$

точка движется внутри объема, предоставленного ей, то, очевидно, она может принимать произвольную скорость и произвольное ускорение, слѣд. эти векторы никакимъ ограниченіямъ не под-

лежатъ. Если же связь дѣйствуетъ въ моментъ t :

$$f(x, y, z, t) = F(t) = 0, \quad (16)$$

то какой либо изъ послѣдующихъ моментовъ $t + \Delta t$ ($\Delta t > 0$) по (2):

$$F(t + \Delta t) \geq 0.$$

Отсюда

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \geq 0,$$

въ произвольномъ, но положительномъ Δt . Принимая Δt безконечно малымъ, находимъ:

$$\frac{dF}{dt} = F'(t) = \frac{df}{dt} \geq 0. \quad (17)$$

Слѣд. при соблюденіи (16), скорость точки по (17) должна удовлетворять условію (§ 119):

$$\Delta f - v \cos(\nu, \Delta f) + \frac{df}{dt} \geq 0.$$

Если поверхность не деформируется и неподвижна, т. е. $\frac{df}{dt} = 0$:

$$v \cos(\nu, \Delta f) \leq 0. \quad (18)$$

Вспомогательнымъ при этомъ, что дифференціальный параметръ связи f вънутрь объема, предоставленнаго для движенія точки, въ дѣль, по § 112, направление Δf идетъ въ ту сторону, въ которой функция f возрастаетъ, а она возрастаетъ при перемѣщеніи точки въ область, ибо для точекъ на поверхности функция f равна нулю, а для точекъ внутри объема $f > 0$, по условію.

Слѣд. для момента t : $\frac{df}{dt} = 0$ то никакихъ заключеній о вы-

сказанныхъ сдѣлать не можемъ и слѣд. ускореніе точки

остается вполне произвольнымъ. Когда же $\frac{df}{dt} = 0$ для момента t , то изъ равенства: $F(t) = 0$; $F'(t) = 0$; вытекаетъ:

$$F(t + \Delta t) = \frac{\Delta t^2}{2} F''(t + \theta \Delta t), \quad (19)$$

гдѣ θ правильная положительная дробь. Но $F'(t + \Delta t) = 0$, слѣд.

$$F''(t) = \frac{d^2 F}{dt^2} = \frac{d^2 f}{dt^2} > 0; \quad (20)$$

или по предыдущему параграфу:

$$\Delta f \dot{v} \cos(\dot{v} \Delta f) + D_2 f > 0. \quad (21)$$

Не должно забывать, что написанное неравенство предполагаетъ

$$f = 0; \quad \frac{df}{dt} = 0.$$

Въ заключеніе обратимъ вниманіе на то, что, когда $f = 0$, а $\frac{df}{dt} = 0$ или когда $f = 0$, $\frac{df}{dt} = 0$, а $\frac{d^2 f}{dt^2} = 0$, движущаяся точка въ одинъ изъ моментовъ, слѣдующихъ за разсматриваемымъ, должна сойти со связи, т. е. f станетъ больше нуля. Дѣйствительно, въ первомъ случаѣ функція f возрастаетъ ($\frac{df}{dt} = 0$); слѣд. изъ нуля она станетъ положительною: $f > 0$, во второмъ случаѣ функція $\frac{df}{dt}$ возрастаетъ, слѣд. изъ нуля она обратится въ положительную величину, но тогда f станетъ функціею возрастающею и слѣд. изъ нуля станетъ положительною: $f > 0$.

Такимъ образомъ движеніе по поверхности $f = 0$, возможно и здѣсь лишь при условіяхъ:

$$f = 0; \quad \frac{df}{dt} = 0; \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = 0. \quad (22)$$

122. Реакція удерживающей связи. Связи идеальныя. Множитель связи. Пусть на несвободную матеріальную точку, находящуюся на удерживающей связи:

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad (23)$$

— вуетъ сила F , имѣющая своими составляющими по координатнымъ осямъ X, Y, Z . Если бы точка была свободною, то по третьему закону Ньютона ея уравненія движенія были бы (§ 94):

$$ma'' = X; my'' = Y; mz'' = Z. \quad (24)$$

Но по (15) ускореніе разсматриваемой точки должно удовлетворять условію:

$$\frac{d^2f}{dt^2} - \frac{\partial f}{\partial x} x'' - \frac{\partial f}{\partial y} y'' - \frac{\partial f}{\partial z} z'' - D_2f = 0. \quad (25)$$

Итакъ, следовательно, если равенства (24) и (25) не противорѣчатъ другъ другу, то изъ нихъ вытекаетъ такая зависимость между силами F :

$$\frac{1}{m} \left(X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} \right) - D_2f = 0. \quad (26)$$

И нетрудно видѣть, что тогда уравненіе (23) служитъ однимъ изъ интеграловъ движенія, а потому мы имѣемъ дѣло съ частнымъ случаемъ движенія свободной точки, а не съ движеніемъ точки по связи.

И действительно, если уравненія (24) умножимъ соответственно

$$\frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial z}$$

и затѣмъ сложимъ, то, какъ слѣдствіе изъ

$$\frac{1}{m} x'' + \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' = \frac{1}{m} \left(X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' - D_2f = \frac{d^2f}{dt^2} = 0;$$

интегрируя:

$$f(x, y, z, t) = at + \beta,$$

гдѣ a и β произвольныя постоянныя.

Итакъ образомъ равенство (23) является частнымъ интеграломъ при $a = \beta = 0$.

Итакъ этотъ случай оставить въ сторонѣ, то соотношеніе (26) является а потому уравненія (24) противорѣчатъ

Выйти изъ такого затрудненія мы можемъ, лишь принявши, что уравненія (24) несправедливы въ настоящемъ случаѣ: кромѣ силы F на разсматриваемую точку должна дѣйствовать нѣкоторая другая сила R , обязанная своимъ происхожденіемъ присутствію связи и потому называемая реакціею связи на точку. Такое принятіе не нарушитъ третьяго закона Ньютона, такъ какъ мы не иначе можемъ представить себѣ связь, какъ механизмъ, соединяющій одну массу съ другою, а тогда источникомъ реакціи на массу, представляемую движущеюся точкою, будетъ та масса, съ которою предыдущая связана кинематическимъ образомъ.

Итакъ уравненія (24) необходимо замѣнить слѣдующими

$$m\ddot{x} = X - R_x, \quad m\ddot{y} = Y - R_y, \quad m\ddot{z} = Z - R_z, \quad (27)$$

гдѣ для сокращенія положено:

$$R_x = R \cos(R, x); \quad R_y = R \cos(R, y); \quad R_z = R \cos(R, z). \quad (28)$$

Посмотримъ, насколько опредѣляется сила R по уравненію (28). Такъ какъ теперь условіе (25) должно быть выполнено, то по (27)

$$\frac{1}{m} \left(R_x \frac{df}{dx} + R_y \frac{df}{dy} + R_z \frac{df}{dz} \right) - \frac{1}{m} \left(X \frac{df}{dx} + Y \frac{df}{dy} + Z \frac{df}{dz} \right) - F \frac{df}{dt} = 0$$

или по (28) и (10):

$$R \cos(R, \Delta f) = \frac{1}{\Delta f} \left\{ X \frac{df}{dx} + Y \frac{df}{dy} + Z \frac{df}{dz} - m F \frac{df}{dt} \right\}. \quad (29)$$

Оказывается, что, если намъ дано лишь уравненіе (23) и известно, какъ на дѣлѣ осуществлена связь, то опредѣленную функцию отъ $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ является одна лишь составляющая реакціи по дифференціальному параметру связи: что же касается до составляющей реакціи въ плоскости, перпендикулярной къ параметру, то для нахожденія ея уравненіе (23) намъ ничего не дастъ.

Поэтому мы ограничимся въ дальнѣйшемъ, разсмотримъ только такихъ связей, которыя вполне опредѣляются своею аналитическою формою, т. е. уравненіемъ (23), и слѣд. не даютъ реакціи въ плоскости, перпендикулярной къ Δf . Такія связи обыкновенно называютъ идеальными; реакція идеальной связи на точку направлена всегда по соответственному градиенту связи.

Изъ вышесказаннаго не слѣдуетъ, что мы исключаемъ вовсе изъ своего разсмотрѣнія связи съ реакціями не по дифференціальнымъ параметрамъ; только, если жадательно изучить движеніе точки по связи такого рода, то, кромѣ уравненія связи, намъ долженъ

Известенъ законъ, которымъ опредѣляется составляющая реакціи въ плоскости, перпендикулярной къ Δf . Законъ этотъ обыкновенно выводится изъ наблюдений и опытовъ надъ физически существующими связями; примѣръ тому увидимъ, когда будемъ говорить о движеніи точки по шероховатой поверхности, т. е. съ трениемъ.

На основаніи сказаннаго для идеальной связи принимаемъ, — R направлена по Δf , и слѣд. по (10):

$$R_x = \frac{R}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}; \quad R_y = \frac{R}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}; \quad R_z = \frac{R}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Обыкновенно отношеніе $\frac{R}{\Delta f}$ означаютъ одною буквою λ , называемую множителемъ связи, т. е.

$$\lambda = \frac{R}{\Delta f} = \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \quad (30)$$

123 Дифференціальныя уравненія движенія точки, находящейся въ идеальной удерживающей связи. На основаніи вышесказаннаго уравненія движенія несвободной точки (27) дѣлаетъ видъ:

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \quad Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \quad Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (31)$$

Сказанные уравненія содержатъ четыре неизвѣстныя — время t , x , y , z ; для нахождения этихъ функций мы имѣемъ четыре уравненія, а именно (31) и (28).

Интегрированіе ведется по слѣдующему плану. Прежде всего заключаемъ неизвѣстную функцию λ при помощи уравненія (28) слѣдствіемъ (23). Подставляя въ (23) значенія производныхъ \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} изъ (31), опредѣляемъ эту функцию отъ t , x , y , z , \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} :

$$\lambda = \frac{1}{(\Delta f)^2} \left(X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + m D_t f \right). \quad (32)$$

Эту величину λ вставимъ въ правыя части уравненія (31). Получимъ три совокупныхъ уравненія второго порядка для трехъ неизвѣстныхъ функций времени x , y , z . Интегрированіе этихъ уравненій приведетъ насъ къ выраженіямъ для x , y , z , въ которыхъ будутъ произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_6 .

но какъ нетрудно видѣть, въ разсматриваемомъ случаѣ независимыхъ постоянныхъ останется только четыре.

На самомъ дѣлѣ, когда дадимъ t ея значеніе (32), то, если умножить уравненія (31) соответственно на $\frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial z}$ и сложить, найдемъ такое равенство, какъ слѣдствіе (32):

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' = - D_x f$$

или

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 0.$$

откуда

$$f(x, y, z, t) = \alpha t + \beta,$$

гдѣ α и β произвольныя постоянныя. Если въ лѣвую часть полученнаго равенства вставимъ значенія для x, y, z , то α и β должны оказаться функціями отъ C_1, C_2, \dots, C_6 .

$$\alpha = \varphi(C_1, C_2, \dots, C_6); \quad \beta = \psi(C_1, C_2, \dots, C_6).$$

А потому для полученія уравненія (23) мы должны положить

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0.$$

такъ что независимыхъ между C_1, \dots, C_6 останутся только четыре.

Причина изложеннаго лежить, конечно, въ томъ, что для исключенія λ мы воспользовались не самимъ уравненіемъ (23); а второю производною отъ лѣвой части его, т. е. (25).

Примѣръ: Точка массъ = 1 лежитъ въ связи:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (33)$$

гдѣ a, b, c, d постоянныя, и находится подъ дѣйствіемъ постоянной силы q , параллельной оси z .

Уравненія движенія

$$x'' = \lambda a; \quad y'' = \lambda b; \quad z'' = q + \lambda c.$$

Опредѣляемъ λ при помощи равенства:

$$ax'' + by'' + cz'' = 0;$$

сдвигъ

$$\lambda = - \frac{y'c}{a^2 + b^2 + c^2} = \text{const.} = \lambda_0.$$

Уравненія безъ λ :

$$x'' = \lambda_0 a; \quad y'' = \lambda_0 b; \quad z'' = g + \lambda_0 c,$$

и съ своими интегралами:

$$x = \frac{\lambda_0 a}{2} t^2 + C_1 t + C_2;$$

$$y = \frac{\lambda_0 b}{2} t^2 + C_3 t + C_4;$$

$$z = \frac{g + \lambda_0 c}{2} t^2 + C_5 t + C_6;$$

C_1, \dots, C_6 постоянныя произвольныя.

Чтобы удовлетворить (33), между этими постоянными должно установиться следующие двѣ зависимости:

$$aC_1 + bC_3 + cC_5 = 0; \quad aC_2 + bC_4 + cC_6 + d = 0.$$

124. Реакція неударивающей связи. Дифференціальныя уравненія движения точки, подчиненной неударивающей связи. Положимъ, свобода точки массы m стѣснена неударивающею связью

$$f(x, y, z, t) > 0. \quad (34)$$

Пусть въ точкѣ приложена сила $F(X, Y, Z)$. Если $f = 0$, точка находится внутри объема, ограниченного поверхностью $f = 0$ (§ 121) ускореніе ея никакому условію не подчинено, и уравненія движения будутъ такими же, какъ и для точки свободы.

$$mx'' = X; \quad my'' = Y; \quad mz'' = Z. \quad (35)$$

Движеніе точки не можетъ быть произвольнымъ только тогда, когда она движется по самой границѣ объема ($f = 0$) и при этомъ $\frac{df}{dt} = 0$ (§ 121); въ такомъ случаѣ ускореніе должно удовлетворять неравенству (20) или (21):

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' + P_2 f = 0. \quad (36)$$

Написанное соотношение не будет противорѣчить уравненіямъ (35), если сила F такова, что

$$\frac{1}{m} \left(X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} \right) - D_2 f = 0. \quad (37)$$

Тогда точка все время движется, какъ свободная.

Но если

$$\frac{1}{m} \left(X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} \right) - D_2 f = 0, \quad (38)$$

то, подобно предыдущему, мы принимаемъ, что къ правымъ частямъ уравненій (35) присоединяются проекціи реакціи связи R, R_x, R_y, R_z на координатныя оси, причемъ предполагается, что ускореніе, получаемое точкою отъ совокупнаго дѣйствія силъ F и R не сводить ее со связи, т. е. по (22) удовлетворяетъ равенству:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 0. \quad (39)$$

Полагая связь идеальною, мы для проекцій реакціи беремъ выраженія:

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \quad R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \quad R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Множитель λ найдемъ изъ (39) по (32):

$$\lambda = \frac{1}{(\Delta f)^2} \left\{ X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + m D_2 f \right\}. \quad (40)$$

Изъ сказаннаго выводимъ, что уравненія движенія точки, подчиненной неудерживающей связи, приходится брать либо въ видѣ (35), либо такіа:

$$mx'' = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \quad my'' = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \quad mz'' = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (41)$$

Легко опредѣлить критеріумъ, указывающій, когда надо брать уравненія одного типа, когда—другого. Изъ сравненія (40) съ (38) видимъ, что для неудерживающей связи всегда

$$\lambda > 0. \quad (42)$$

Слѣд уравненій типа (41) годятся лишь тогда, пока множитель λ сохраняетъ положительное значеніе; когда же λ обращается въ нуль (для этого случая оба типа уравненій совпадаютъ) и затѣмъ становится отрицательнымъ, надо брать уравненія типа (35).

Такимъ образомъ планъ рѣшенія вопроса о движеніи точки, подчиненной неударивающей связи, слѣдующій. Прежде всего по начальнымъ даннымъ: $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$, смотримъ, соблюдены ли для начального момента $t = t_0$ условія

$$f=0; \frac{df}{dt}=0; \lambda \geq 0. \quad (43)$$

Если хотя одно изъ нихъ невыполнено, беремъ уравненія типа (35). Когда всѣ условія (43) удовлетворены, обращаемся къ уравненіямъ (41). Интегрируя ихъ (§ 123), находимъ x, y, z, λ , какъ функція времени:

$$x = \varphi(t); y = \psi(t); z = \theta(t); \lambda = \gamma(t).$$

Изслѣдуемъ, не можетъ ли функція $\gamma(t)$ обратиться въ нуль и затѣмъ стать отрицательною. Если $\gamma(t)$ всегда положительна или нуль, задача кончена; если же $\gamma(t)$ обращается въ нуль для момента $t = t_1$, а затѣмъ становится < 0 , то уравненія (41) годятся лишь для промежутка времени отъ t_0 до t_1 . Съ момента t_1 надо уже брать уравненія (35) и интегрировать эти уравненія при начальныхъ условіяхъ: $t = t_1, x = \varphi(t_1), y = \psi(t_1); z = \theta(t_1); x' = \varphi'(t_1); y' = \psi'(t_1); z' = \theta'(t_1)$.

Можетъ случиться, что точка, движущаяся какъ свободная, т. е. по уравненіямъ (35), снова попадетъ на связь координаты ея обратятъ f въ нуль. Тогда произойдетъ явленіе, называемое ударомъ — скорости точки измѣнятся мгновенно. Какъ опредѣлить эти измѣненія, увидимъ впоследствии. Во всякомъ случаѣ къ новымъ скоростямъ послѣ удара мы должны отнестись, какъ къ даннымъ начальнымъ, и такъ продолжать наше изслѣдованіе и переходъ отъ уравненій одного типа къ уравненіямъ другого, пока не исчерпаемъ, если сможемъ, всѣ моменты, для которыхъ или λ обращается въ нуль, или происходитъ ударъ.

Изъ (41) по (42) вытекаетъ, что неударивающая связь можетъ оказывать реакцію лишь по положительному направлению нормали или дифференціального параметра перваго порядка (§ 112).

125. Дифференціальныя уравненія движенія точки, подчиненной двумъ связямъ. Положимъ, что разсматриваемая точка подчинена двумъ связямъ:

$$f_1(x, y, z, t) = 0; f_2(x, y, z, t) = 0. \quad (44)$$

Принимая, что обѣ связи идеальныя, по § 123 получаемъ слѣдующія уравненія движенія для взятой точки:

$$\begin{aligned} m_x \ddot{x} &= X - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}; \\ m_y \ddot{y} &= Y - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}; \\ m_z \ddot{z} &= Z - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (45)$$

Написанныя уравненія содержатъ пять неизвѣстныхъ функций времени: $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$; для нахождения этихъ функций мы имѣемъ и пять уравненій (44) и (45).

Интегрированіе ведется тѣмъ же путемъ, какъ и для одной связи. Прежде всего изъ (45) исключаемъ неизвѣстныя функции λ_1 и λ_2 съ помощью уравненій:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d f_1}{dt} = 0, \quad (46)$$

служащихъ слѣдствіемъ уравненій (44). Въ раскрытомъ видѣ равенства (46) представятся такъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \ddot{z} - P_1 f_1 = 0;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \ddot{z} - P_2 f_2 = 0$$

Подставляя сюда значенія вторыхъ производныхъ $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, изъ (45), находимъ для опредѣленія λ_1 и λ_2 уравненія:

$$\begin{aligned} A_{11}\lambda_1 + A_{12}\lambda_2 + Q_1 + mP_1 f_1 &= 0; \\ A_{21}\lambda_1 + A_{22}\lambda_2 + Q_2 + mP_2 f_2 &= 0; \end{aligned} \quad (47)$$

гдѣ

$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \frac{\partial f_j}{\partial y} + \frac{\partial f_i}{\partial z} \frac{\partial f_j}{\partial z}; \quad (48)$$

$$Q_i = X \frac{\partial f_i}{\partial x} + Y \frac{\partial f_i}{\partial y} + Z \frac{\partial f_i}{\partial z}; \quad i, j = 1, 2.$$

Определитель Δ уравнений (47) может быть представленъ въ видѣ суммы трехъ квадратовъ: дѣйствительно по (48):

$$\Delta = A_{11} A_{22} - A_{12}^2 = \begin{vmatrix} a(f_1 f_2) \\ a(y z) \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a(f_1 f_2) \\ a(z x) \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a(f_1 f_2) \\ a(x y) \end{vmatrix}^2, \quad (49)$$

если условимся въ обозначеніи

$$\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(ab)} = \frac{\partial\varphi}{\partial a} \frac{\partial\psi}{\partial b} - \frac{\partial\psi}{\partial a} \frac{\partial\varphi}{\partial b}.$$

Изъ (49) заключаемъ, что Δ можетъ равняться нулю лишь въ томъ случаѣ, когда каждый изъ определителей второго порядка (49) обращается въ нуль. Но тогда между функциями f_1 и f_2 должно существовать соотношеніе:

$$H(f_1, f_2, t) = 0,$$

и слѣд. или 1) при $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$, или 2) при $f_1 = 0$ функция $f_2 = \varphi(t)$, функции времени, отличной отъ нуля. Въ первомъ случаѣ одна изъ связей служить слѣдствіемъ другой, а во второмъ случаѣ связи противорѣчатъ другъ другу.

Если исключимъ изъ нашего разсмотрѣнія эти случаи, то Δ будетъ отлично отъ нуля, и слѣд. мы всегда сможемъ изъ (47) опредѣлить λ_1 и λ_2 какъ функции отъ аргументовъ x, y, z, x', y', z', t . Подставляя найденныя выраженія въ правыя части уравненій (45), получимъ три совокупныхъ уравненія второго порядка относительно неизвѣстныхъ функций x, y, z . Интегрирование этихъ уравненій приведетъ насъ къ выраженіямъ для x, y, z , содержащимъ шесть произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_6 . Нетрудно видѣть, что независимыми между ними будутъ только двѣ.

Умножая каждое изъ уравненій (45) соответственно на $\frac{df_1}{dx}$, $\frac{df_1}{dy}$, $\frac{df_1}{dz}$ и складывая, мы по (47) получимъ изъ уравненій (45) при найденныхъ значеніяхъ для λ_1 и λ_2 какъ слѣдствіе первое изъ уравненій (46). Тѣмъ же путемъ выведемъ изъ уравненій (45) и второе уравненіе (46). Такимъ образомъ въ числѣ интеграловъ разсматриваемой системы будутъ слѣдующіе два:

$$f_1(x, y, z, t) = \alpha_1 t + \beta_1; \quad f_2(x, y, z, t) = \alpha_2 t + \beta_2. \quad (50)$$

Постоянные $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ должны оказаться некоторыми функциями отъ $\zeta'_1, \zeta'_2, \dots, \zeta'_6$. Но для полученія изъ (50) данныхъ связей (44) мы должны положить

$$\alpha_1 = 0; \beta_1 = 0; \alpha_2 = 0; \beta_2 = 0;$$

что и даетъ четыре зависимости между $\zeta'_1, \zeta'_2, \dots, \zeta'_6$, такъ что произвольныхъ останется только двѣ.

Когда одна изъ связей или обѣ неудерживающія, ходъ рѣшенія тотъ же, что и въ § 124.

ГЛАВА XV

Движеніе точки по поверхности.

126. Дифференціальныя уравненія движенія точки по поверхности. Уравненія движенія матеріальной точки по поверхности

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad (1)$$

въ общемъ видѣ уже нами найдены (§ 123):

$$\begin{aligned} mx'' &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \\ my'' &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \\ mz'' &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравненія эти замѣняютъ собою геометрическое равенство

$$(m\ddot{v}) = (F) + (N),$$

гдѣ \ddot{v} ускореніе точки, F равнодѣйствующая приложенныхъ къ ней силъ, N реакція поверхности, направленная по нормали „ къ поверхности (§ 122).

Посмотримъ теперь, какъ можно видоизмѣнить и упростить уравненія (2) въ томъ случаѣ, когда поверхность неизмѣнна и неподвижна, т. е. когда въ уравненіе (1), время явно не входитъ:

$$f(x, y, z) = 0. \quad (3)$$

(очень удобно бывает выбрать такую систему координатъ, чтобы поверхность (3) была одною изъ координатныхъ, а координатныя линіи, ей соотвѣтствующія, были къ этой поверхности ортогональны. Пусть мы вьвели такую систему координатъ q_1, q_2, q_3 , и поверхность (3) представляется въ этой системѣ уравненіемъ

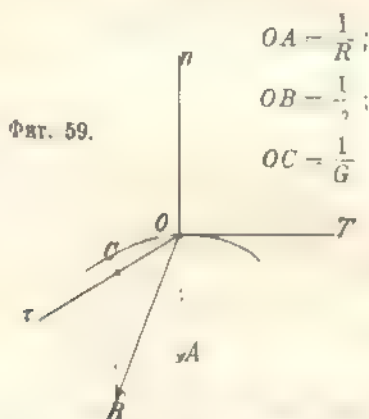
$$q_3 - a_3 = 0, \quad (4)$$

гдѣ a_3 нѣкоторая постоянная.

Реакція поверхности (§ 122) будетъ направлена по координатной оси 3 (§ 43) и слѣд. не дасть проекцій на оси 1 и 2. Поэтому уравненія движенія точки будутъ (см. (12) § 52 и (2) § 93):

$$\begin{aligned} A_1 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial q_1} - \frac{\partial h}{\partial q_1} \right) &= Q_1, \\ A_2 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial q_2} - \frac{\partial h}{\partial q_2} \right) &= Q_2, \\ A_3 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial q_3} - \frac{\partial h}{\partial q_3} \right) &= Q_3 + N, \end{aligned} \quad (5)$$

гдѣ A_1, A_2, A_3 коэффициенты выраженія h (см. (18) § 43), Q_1, Q_2, Q_3 проекціи F на соотвѣтственныя координатныя оси, а N реакція поверхности.



Мы видимъ, что первыя два уравненія (5) вовсе не содержатъ реакціи, а потому, если намъ интересно лишь движеніе точки, то мы можемъ ограничиться этими двумя уравненіями и вовсе не

принимать во вниманіе уравненія третьяго. Первые два уравненія (5) содержатъ только двѣ неизвѣстныя функции времени q_1 и q_2 , такъ какъ q_3 по (4) равно постоянному a_3 . Интегралы этихъ уравненій будутъ содержать четыре произвольныхъ постоянныхъ, какъ это и слѣдуетъ (§ 123). Третье уравненіе понадобится намъ въ томъ случаѣ, когда мы пожелаемъ найти величину реакціи Λ .

Можно также отнести уравненія движенія точки къ слѣдующимъ подвижнымъ осямъ, имѣющимъ начало въ движущейся точкѣ. примемъ за Ox касательную OT (Фиг. 59) къ траекторіи, за Oz положительную нормаль Om къ поверхности, а за Oy направление $O\tau$, перпендикулярное къ OT и Om . Очевидно, это направление будетъ лежать въ касательной плоскости къ поверхности

Пользуясь равенствомъ (3) и припоминая проекціи ускоренія на касательную и на радіусъ кривизны ρ траекторіи (§ 51), находимъ:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F \cos(F, T); \\ m \frac{v^2}{\rho} \cos(\rho, n) &= F \cos(F, n) + N; \\ m \frac{v^2}{\rho} \cos(\rho, \tau) &= m v \frac{v}{\rho} \sin(\rho, n) = F \cos(F, \tau). \end{aligned} \quad (6)$$

Полученныя уравненія пишутъ обыкновенно въ нѣсколько иной формѣ.

Съ этою цѣлью припомнимъ выраженія (38) § 32 для кривизны:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{\rho} \cos(\rho x); \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{\rho} \cos(\rho y); \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{1}{\rho} \cos(\rho z). \quad (7)$$

Мы ихъ получили, разсматривая кривизну какъ векторъ, служащій геометрическою производною по дугѣ s кривой отъ нѣкотораго переменнаго вектора. Векторъ-кривизна имѣетъ величину равную $\frac{1}{\rho}$; а направленіе его совпадаетъ съ направленіемъ радіуса кривизны, идущимъ къ центру кривизны. Разложимъ векторъ-кривизну OB на два составляющихъ вектора (Фиг. 59), одинъ OA по нормали, а другой OC по направленію $O\tau$. Тогда

$$\begin{aligned} OA &= OB \cos(OB, n) = \frac{1}{\rho} \cos(\rho, n); \\ OC &= OB \cos(OB, \tau) = \frac{1}{\rho} \sin(\rho, n). \end{aligned} \quad (8)$$

Но по (7):

$$\frac{1}{\rho} \cos(\rho, n) = \frac{1}{\Delta f} \left(\frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (9)$$

Дифференцируя дважды по s равенство (8), мы получимъ подобно (14) § 120:

$$\frac{d^2x}{ds^2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d^2y}{ds^2} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d^2z}{ds^2} \frac{\partial f}{\partial z} - D_2' f = 0,$$

гдѣ

$$D_2' f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dz}{ds} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \cdot \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dy}{ds}.$$

Изъ предъидущихъ равенствъ видимъ, что

$$\frac{1}{\Delta f} \left(\frac{d^2x}{ds^2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d^2y}{ds^2} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d^2z}{ds^2} \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \text{funct} \left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right)$$

т. е. по (9) отношеніе

$$\frac{\cos(\rho, n)}{\rho}$$

зависитъ лишь отъ положенія точки на поверхности и направленія касательной.

Отсюда заключаемъ,

1) что для всѣхъ кривыхъ на поверхности, имѣющихъ въ данной точкѣ общую касательную и общую плоскость кривизны, радіусъ кривизны одинъ и тотъ же;

2) что для всѣхъ кривыхъ на поверхности, имѣющихъ въ данной точкѣ общую касательную, выраженіе

$$\frac{\cos(\rho, n)}{\rho} = \text{const.}$$

Если замѣтимъ, что для нормальнаго плоскаго сѣченія поверхности черезъ рассматриваемую касательную уголъ (ρ, n) равенъ нулю или π , то видимъ, что

$$\frac{\cos(\rho, n)}{\rho} = \frac{1}{R},$$

гдѣ R радиусъ кривизны нормального сѣченія (теорема Менье) R принимается величиною положительною или отрицательною въ зависимости отъ знака $\cos(\rho, n)$

Что же касается до OC' , проекціи вектора-кривизны на касательную плоскость, то для величины его имѣемъ слѣдующее выраженіе по (9):

$$\begin{aligned} OC^2 &= \frac{\sin^2(\rho, n)}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} - \frac{\cos^2(\rho, n)}{\rho^2} = \\ &= \frac{1}{(\Delta f)^2} \left\{ \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 \right\} - \left\{ \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + \left(\frac{df}{dy} \right)^2 + \left(\frac{df}{dz} \right)^2 \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{d^2x}{ds^2} \frac{df}{dx} + \frac{d^2y}{ds^2} \frac{df}{dy} + \frac{d^2z}{ds^2} \frac{df}{dz} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{(\Delta f)^2} \left\{ \left(\frac{d^2y}{ds^2} \frac{df}{dz} - \frac{d^2z}{ds^2} \frac{df}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \frac{df}{dx} - \frac{d^2x}{ds^2} \frac{df}{dz} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{d^2x}{ds^2} \frac{df}{dy} - \frac{d^2y}{ds^2} \frac{df}{dx} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

Разсматриваемый векторъ обращается въ нуль, если данная кривая удовлетворяетъ соотношеніямъ

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{df}{dx} : \frac{df}{dy} : \frac{df}{dz}$$

или

$$\cos(\rho, x) : \cos(\rho, y) : \cos(\rho, z) = \cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z).$$

Такая кривая, у которой плоскость кривизны всегда нормальна къ поверхности, носитъ названіе геодезической линіи; по этому-то и проекцію OC вектора-кривизны на касательную плоскость называютъ геодезическою кривизною данной кривой и обыкновенно обозначаютъ такъ $\frac{1}{\tau}$.

Пользуясь сделанными замѣчаніями, мы можемъ переписать уравненія (6) слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F \cos(F, T); \\ m \frac{v^2}{R} &= F \cos(F, n) + N; \\ m \frac{v^2}{r} &= F \cos(F, \tau). \end{aligned} \quad (11)$$

127. Интегралъ площадей. Законъ моментовъ количества движенія (§ 103) для точки, движущейся по поверхности (1), выражается такъ:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m(xz' - zy') &= Zy - Yz + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial z} y - \frac{\partial f}{\partial y} z \right); \\ \frac{d}{dt} m(xz' - zx') &= \Lambda z - Zx + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} z - \frac{\partial f}{\partial z} x \right), \\ \frac{d}{dt} m(xy' - yx') &= Yx - Xy + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial y} x - \frac{\partial f}{\partial x} y \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Члены съ множителемъ λ представляютъ собою моменты реакцій около соответствующихъ осей координатъ. Для того, чтобы этотъ моментъ вокругъ какой либо оси, напр. Oz , обратился въ нуль, необходимо соблюденіе условія:

$$\frac{\partial f}{\partial y} x - \frac{\partial f}{\partial x} y = 0. \quad (13)$$

Соответствующая этому уравненію съ частными производными система совокупныхъ уравненій:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x},$$

имѣетъ очевидный интегралъ: $x^2 + y^2 = \text{const.}$ Слѣд. f представляется произвольною функціею отъ $x^2 + y^2$ и, конечно, z , такъ какъ въ (13) не входитъ производная по этой перемѣнной. Другими словами, данная поверхность должна быть поверхностью вращения вокругъ оси z овъ. Справедливость полученнаго вывода

исна и геометрически: нормаль къ поверхности вращения всегда лежитъ въ одной плоскости съ осью.

Такимъ образомъ для движения точки по поверхности вращения мы можемъ получить интеграль площадей (§ 105), если равнодѣйствующая сила P не даетъ момента около оси поверхности.

128. Интеграль живой силы. Законъ живой силы (§ 109) въ примѣненіи къ точкѣ, движущейся по поверхности, даетъ по (2)

$$d \frac{mv^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \right) dt;$$

или, на основаніи (9) § 119,

$$d \frac{mv^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz + \lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt. \quad (14)$$

Последній членъ въ правой части представляетъ собою элементарную работу реакціи. Эта работа обращается въ нуль, когда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (15)$$

т. е. связь неизмѣнна и неподвижна.

Если, кромѣ того, элементарная работа равнодѣйствующей представляется полнымъ дифференціаломъ,

$$X dx + Y dy + Z dz = dU, \quad (16)$$

то изъ (14) мы получаемъ интеграль живой силы (§ 110) въ видѣ

$$\frac{mv^2}{2} = U + h, \quad (17)$$

гдѣ h произвольная постоянная.

Замѣтимъ, что по (15) въ силу уравненія (3) одна изъ координатъ служитъ функціе остальныхъ двухъ, напр. $z = \text{func}t(x, y)$. Пусть производныя

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q;$$

тогда

$$X dx + Y dy + Z dz = (X + pZ) dx + (Y + qZ) dy.$$

Здѣсь независимыхъ перемѣнныхъ только двѣ, поэтому для полученія полнаго дифференціала, т. е. выраженія (16), теперь необходимы не три условія (17) § 110, какъ для свободной точки, а только одно:

$$\frac{\partial}{\partial y}(X + pZ) = \frac{\partial}{\partial x}(Y + qZ). \quad (18)$$

Замѣтимъ, между прочимъ, что, если мы нашли интеграль площади и интеграль живой силы, то мы опредѣлили всѣ независимые другъ отъ друга первые интегралы движенія для рассматриваемой точки, такъ какъ число этихъ независимыхъ интеграловъ равно двумъ §§ 123 или 126)

129 Коническій маятникъ. Разсмотримъ движеніе тяжелой точки по неподвижной сферѣ. Выберемъ начало координатъ въ центрѣ сферы, а O направимъ вертикально книзу. Тогда уравненіе связи (удерживающей) будетъ:

$$R^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0, \quad (19)$$

если R радиусъ сферы. Ускореніе тяжести означимъ черезъ g , тогда уравненія движенія по (2) представятся такъ

$$\begin{aligned} mx'' &= -2\lambda x; \\ my'' &= -2\lambda y; \\ m\epsilon'' &= mg - 2\lambda \epsilon. \end{aligned} \quad (20)$$

Дифференцируя дважды (19), получимъ:

$$xx'' + yy'' + z\epsilon'' + x'^2 + y'^2 + \epsilon'^2 = 0.$$

Подставляя сюда изъ (20), опредѣляемъ λ :

$$2(2x^2 - y^2 - z^2)\lambda + m(qz - r^2 - y^2 - \epsilon'^2);$$

или, полагая $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и пользуясь (19):

$$\lambda = \frac{m(v^2 + g\epsilon)}{2R^2}. \quad (21)$$

Чтобы получить отсюда реакцію сферы N , надо по (30) § 122 умножить λ на дифференціальный параметръ перваго порядка отъ лѣвой части уравненія связи (19); тогда имѣемъ

$$N = \lambda \Delta f = 2\lambda R = \frac{m(v^2 + g^2)}{R}. \quad (22)$$

Сферу можно разсматривать какъ поверхность вращенія около любого изъ діаметровъ, а сила тяжести не даетъ момента около вертикали; поэтому для взятаго движенія мы можемъ по § 127 написать интегралъ площадей

$$m(xy' - yx') = mA, \quad (23)$$

гдѣ A произвольная постоянная.

Кромѣ того въ настоящемъ случаѣ имѣемъ и интегралъ живой силы, такъ какъ сфера неподвижна, а сила тяжести, какъ постоянная, имѣетъ потенциаль; сокращая на массу, интегралу живой силы дадимъ видъ:

$$v^2 = 2gz + 2h. \quad (24)$$

Введемъ цилиндрическія координаты z, r, θ (§ 39). Тогда уравненіе (19) перепишется такъ:

$$R^2 - r^2 - z^2 = 0, \quad (25)$$

а интегралы (23) и (24) примутъ видъ

$$r^2 \theta' = A;$$

$$z'^2 + r'^2 + r^2 \theta'^2 = 2gz + 2h.$$

Если вставимъ сюда вмѣсто r его значеніе изъ (25) и замѣтимъ, что

$$r' = \frac{zz'}{\sqrt{R^2 - z^2}},$$

то найдемъ:

$$(R^2 - z^2)^{3/2} = A.$$

$$\frac{R^2}{R^2 - z^2} z'^2 + (R^2 - z^2) \theta'^2 = 2gz + 2h. \quad (26)$$

Исключая изъ (26) θ съ помощью интеграла площадей, получимъ для z дифференціальное уравненіе:

$$z \frac{2g}{R^2} \left(z - \frac{b}{a} \right) (R^2 - z^2) \frac{A'}{2g} = Q(z). \quad (27)$$

Въ многочленѣ $Q(z)$ станемъ давать аргументу z значенія α , R , z_0 , R ; подъ z мы разумѣемъ данное начальное значеніе координаты z , при чемъ, конечно, по (25)

$$R = z, \quad R = R.$$

Нетрудно видѣть, что

$$Q(\alpha) = 0; \quad Q(-R) = \frac{A^2}{R^2} = 0, \quad Q(z_0) = z_0' = 0;$$

$$Q(R) = \frac{A^2}{R^2} = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что многочленъ $Q(z)$ имѣетъ всѣ корни вещественные; одинъ изъ корней, ζ , всегда отрицателенъ и численно больше R ; другой, α , заключается между R и z_0 , третій, β , между z_0 и $+R$, т. е.

$$R < \alpha < z_0 < \beta < R.$$

Теперь вмѣсто (27) можемъ написать:

$$z'^2 = \frac{2g}{R^2} (z - \zeta)(\beta - z)(z - \alpha). \quad (28)$$

Переменная z , которая можетъ измѣняться лишь между R и $-R$, должна заключаться между предѣлами α и β ; въ противномъ случаѣ правая часть равенства (28) стала бы отрицательною. Такимъ образомъ видимъ, что траекторія точки должна быть заключена между двумя параллельными кругами: $z = \alpha$ и $z = \beta$; она будетъ послѣдовательно касаться каждаго изъ нихъ, такъ какъ при z равномъ α или β производная z' обращается въ нуль.

Движеніе точки въ общемъ случаѣ выразится черезъ эллиптическія функціи; мы остановимся лишь на томъ частномъ случаѣ, когда $\alpha = \beta$. Тогда уравненіе (28) обращается въ такое:

$$z'^2 = \frac{2g}{R^2} (z - \zeta)(z - \alpha)^2.$$

Правая часть для какого либо z , численно меньшаго R и отличнаго отъ α , всегда отрицательна; слѣд. единственное возможное предположеніе

$$z = z_0 = \alpha; \quad z' = 0.$$

Точка перемѣщается по параллельному кругу, совершая такъ называемое движеніе коническаго маятника.

Опредѣлимъ для этого случая законъ измѣненія угла θ . По (24) произвольная постоянная

$$2h = v_0^2 - 2gz_0; \quad (29)$$

слѣд. интеграль (26) при $z = 0$ даетъ намъ

$$\theta' = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 - z_0^2}}. \quad (30)$$

Но z_0 служить кратнымъ корнемъ уравненія: $Q(z) = 0$, слѣд. для $z = z_0$ должна обращаться въ нуль и производная отъ $Q(z)$ по z ; т. е. z_0 должно быть корнемъ уравненія

$$3z^2 + 2z \frac{h}{g} - R^2 = 0.$$

Подставляя сюда вмѣсто z его значеніе z_0 , а вмѣсто $2h$ выраженіе (29), находимъ

$$v_0^2 = g \frac{R^2 - z_0^2}{z_0}.$$

А потому (30) даетъ

$$\theta' = \sqrt{\frac{g}{z_0}},$$

откуда, интегрируя,

$$\theta - \theta_0 = (t - t_0) \sqrt{\frac{g}{z_0}},$$

если θ_0 значеніе θ для момента t_0 .

130. Движеніе по инерціи. Приложимъ уравненія (11) къ рѣшенію задачи о движеніи точки по неподвижной поверхности безъ дѣйствія силъ.

При $P' = 0$ первое уравненіе (11) даетъ

$$\frac{dv}{dt} = 0,$$

т. е. $v = v_0 = \text{const.}$, движеніе равномерное.

Изъ третьяго уравненія (11) вытекаетъ

$$\frac{1}{G} = 0;$$

траекторія — геодезическая линія

Второе уравненіе даетъ величину реакціи:

$$N = m \frac{v_0^2}{R}.$$

Примѣръ: движеніе точки безъ силъ по цилиндру вращенія: радіусъ ортогональнаго сѣченія равенъ l .

Геодезическою линіею на цилиндрѣ служитъ гелисъ. Пусть касательная къ гелису образуетъ съ плоскостью ортогональнаго сѣченія цилиндра уголъ α . Тогда уравненіе траекторіи:

$$x = x_0 + l \cdot z = z \cdot l \cdot \cos^2 \alpha, \quad (y = 0, z = 0).$$

Одно изъ главныхъ сѣченій поверхности, очевидно, идетъ по производящей, и другое ортогонально къ производящимъ, слѣдъ главные радіусы кривизны — и l . По извѣстной теоремѣ Эйлера кривизна $\frac{1}{R}$ нормальнаго сѣченія черезъ касательную къ гелису будетъ равна $\frac{\cos^2 \alpha}{l}$, а потому для реакціи имѣемъ выраженія:

$$N = m \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{l}.$$

131. Движеніе по конусу вращенія. Въ видѣ примѣра на приложеніе уравненій типа (5) займемся задачею о движеніи точки по конусу вращенія. Если мы возьмемъ ось конуса за ось сферическихъ координатъ ρ, φ, ψ , то данная поверхность станетъ одною изъ координатныхъ:

$$\varphi - \alpha = 0; \quad (31)$$

здесь α угол раствора даннаго конуса.

Уравнения движения по (3) § 93 послѣ замены φ черезъ α по (31) напишутся такъ:

$$\begin{aligned} m(\rho'' - \rho\psi'^2 \sin^2 \alpha) &= F' \cos(F, \alpha); \\ m\rho^2 \psi'^2 \sin \alpha \cos \alpha &= F' \cos(F, \beta) - N; \\ m \frac{d}{dt} (\rho^2 \psi' \sin^2 \alpha) &= F' \cos(F, \gamma). \end{aligned} \quad (32)$$

Движеніе точки опредѣляется лишь первымъ и третьимъ изъ этихъ уравненій; второе понадобится тогда, когда пожелаемъ найти реакцію N .

Положимъ, что сила F' направлена по оси α и зависитъ лишь отъ разстоянія ρ , т. е. пусть

$$F' \cos(F\alpha) = mf(\rho); \quad F' \cos(F\gamma) = 0.$$

Тогда послѣднее изъ уравненій (32) даетъ намъ интеграль площади

$$\rho^2 \psi' \sin^2 \alpha = A; \quad (33)$$

A произвольная постоянная.

Поверхность неподвижна: потому имѣемъ еще интеграль живой силы:

$$\rho'^2 + \rho^2 \psi'^2 \sin^2 \alpha = 2\Phi(\rho) + 2h; \quad (34)$$

здесь

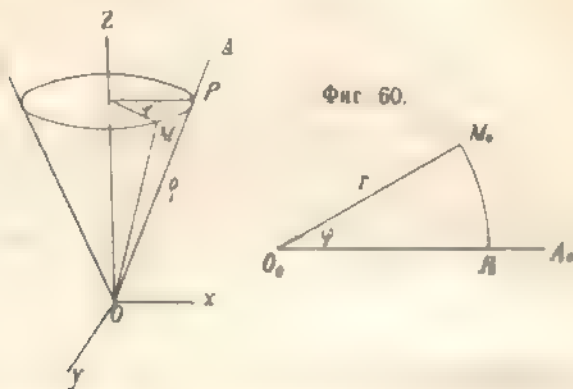
$$\Phi(\rho) = \int f(\rho) d\rho.$$

Оба первые интеграла движенія нами найдены; интегрированіе закончится двумя квадратурами. И именно, исключая изъ (34) ψ' съ помощью (33) получимъ дифференціальное уравненіе для ρ , рѣшаемое квадратурою; найдя ρ какъ функцію времени, новою квадратурою опредѣлимъ ψ изъ (33).

Представимъ себѣ, что взятый конусъ развернутъ на плоскость. Пусть производящая OA (Фиг. 60), лежащая въ плоскости $\alpha O\alpha$, заняла на плоскости положеніе O_0A_0 , а какая либо точка M

на конусъ съ координатами φ, ψ помѣстилась въ M_0 . Положеніе M на плоскости будемъ опредѣлять координатами r и φ , т. е. разстояніемъ M отъ O и угломъ между OM съ прямой OA . Замѣтимъ, что при разворачиваніи конуса дуга MP параллели съ радіусомъ $r \sin \alpha$ обратится въ дугу M_0P_0 круга радіуса r ; при этомъ, однако, длины дугъ не измѣнятся, т. е.

$$\overset{\frown}{MP} = \overset{\frown}{M_0P_0}.$$



Фиг. 60.

Но MP соответствуетъ центральный уголъ ψ , а M_0P_0 — уголъ φ , слѣд.

$$r\psi \sin \alpha = r\varphi.$$

Теперь уже легко получить зависимость между координатами точки M на конусѣ и координатами M (ея изображенія) на разверткѣ:

$$r = r; \psi \sin \alpha = \varphi. \quad (35)$$

Когда точка M движется по конусу, ея изображеніе M_0 перемѣщается по плоскости. Интегралы движенія (33) и (34) при помощи соотношеній (35) переходятъ въ слѣдующіе интегралы движенія для M_0 :

$$r^2 \dot{\varphi} = A_0; r'^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = 2\Phi(r) + 2h;$$

если

$$A_0 = \frac{A}{\sin \alpha}.$$

Такъ какъ θ не мѣняетъ своего знака, движеніе точки прогрессивное, т. е. идущее безъ остановокъ въ одну и ту же сторону. Всю окружность точка пробѣгаетъ по (44) и (45) за промежутокъ времени

$$T = 2k \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}}.$$

Займемся теперь опредѣленіемъ величины реакціи окружности на точку. Положимъ сначала, что связь позволяетъ точку приблизиться къ центру окружности: маятникъ представляетъ собою тяжелое тѣло, подвѣшенное на нити. Тогда уравненіе связи по условію § 118 будетъ

$$R - x - y = 0. \quad (46)$$

Уравненія движенія въ декартовыхъ координатахъ при выбранныхъ нами осяхъ напишутся такъ,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2\lambda x, \\ m\ddot{y} &= mg - 2\lambda y. \end{aligned} \quad (47)$$

Для опредѣленія λ дифференцируемъ дважды уравненіе (46):

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = x\dot{x}^2 + y\dot{y}^2 + v^2 = 0.$$

Вставляя сюда изъ (47) и пользуясь равенствомъ (46), найдемъ для λ выраженіе

$$\lambda = \frac{m}{2R} (gy + v^2).$$

Реакціи N по (30) § 122 опредѣлится изъ равенства:

$$N = 2\lambda R = \frac{m}{R} (gy + v^2).$$

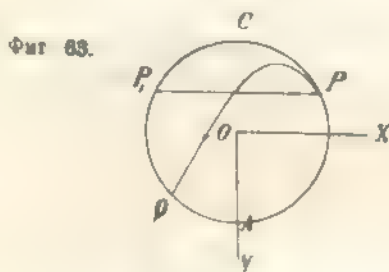
Замѣняя v^2 изъ интеграла живой силы (33), получаемъ:

$$\lambda = \frac{3gm}{2R^2} \left(y - \frac{2}{3} \beta \right). \quad (48)$$

Изъ (33) заключаемъ, что всегда

$$y > \beta. \quad (48)$$

Когда $\beta = 0$, то по (49) во все время движенія $y = \frac{2}{3}\beta$, а потому при $\beta = 0$, т. е. когда маятникъ въ своихъ качаніяхъ не ставитъ нити горизонтально, λ всегда положительно и слѣд. (§ 124) точка не можетъ сойти со связи; другими словами нить всегда натянута.*



Когда $\beta = 0$, но $\frac{2}{3}\beta < R$, уровень $y = \frac{2}{3}\beta$ (Фиг. 63) пересѣкаетъ окружность въ точкахъ P и P_1 . Лишь только тяжелая точка въ своемъ движеніи дойдетъ до одной изъ этихъ точекъ, λ обращается въ нуль и затѣмъ становится отрицательнымъ, слѣд. здѣсь нить ослабляется, точка сходитъ со связи и падаетъ по параболѣ PQ , пока въ точкѣ Q снова не придетъ на связь.

Когда $\beta = 0$ и при томъ $\frac{2}{3}\beta > R$, уровень $y = \frac{2}{3}\beta$ проходитъ выше окружности, слѣд. y всегда больше $\frac{2}{3}\beta$, а потому по (48) во все время движенія нить натянута.

Если окружность позволяетъ точкѣ произвольно удалиться отъ центра, тяжелая точка катится по обручу, то уравненіе связи по условію § 118 будетъ:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0;$$

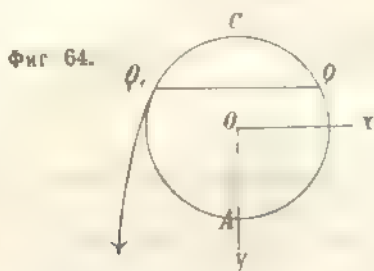
а потому новыя уравненія движенія:

$$mx'' = 2\lambda x;$$

$$my'' = mg + 2\lambda y;$$

отличаются от (17) лишь знакомъ при λ . Для этого множителя мы найдемъ теперь выраженіе:

$$\lambda = \frac{3mg}{2R^2} \left(\frac{2}{3} \beta - y \right). \quad (50)$$



Движеніе точки по связи возможно только въ томъ случаѣ, когда соблюдено условіе

$$\frac{2}{3} \beta \geq y;$$

но по (49) $\beta \geq y$ и, кромѣ того, по (33) всегда $y \leq R$, слѣд. $\frac{2}{3} \beta$

должно быть $\leq R$. Уровень $y = \frac{2}{3} \beta$ пересѣкаетъ тогда окружность (Фиг. 64) въ точкахъ Q и Q_1 . Движеніе возможно лишь по дугѣ сегмента $Q'Q_1$. Въ точкахъ Q и Q_1 , если скорость направлена книзу, тяжелая точка сходитъ со связи и падаетъ по параболѣ. Во всякихъ другихъ положеніяхъ не на дугѣ $Q'Q_1$ и при всякихъ иныхъ начальныхъ условіяхъ (другомъ β) тяжелая точка немедленно оставляетъ связь.

ГЛАВА XVII

Движеніе точки по связи съ треніемъ.

137. Законы тренія. До сихъ поръ мы принимали, что связь оказываетъ реакцію по дифференціальному параметру перваго порядка (§ 122); эта реакція вполнѣ опредѣляется, когда намъ дано аналитическое уравненіе связи. Но можетъ случиться, что связь оказываетъ реакцію на матеріальную точку и въ плоскости, перпендикулярной къ дифференціальному параметру; тогда законы, упривляющие такую реакціею, не могутъ быть найдены только изъ аналитической формы связи, а должны быть опредѣлены изъ другихъ источниковъ, напр. при помощи наблюденій и опыта—другими словами, реакціи такого рода представляютъ собою, собственно говоря, заданныя силы. Къ нимъ принадлежитъ и такъ называемая **сила тренія**.

Законы тренія относятся къ взаимодействию двухъ тѣлъ, соприкасающихся другъ съ другомъ и движущихся другъ относительно друга; принимая, что матеріальная точка представляетъ собою весьма малое тѣло, мы можемъ результаты опытовъ надъ трущимися тѣлами приложить и къ матеріальной точкѣ.

Когда движеніе точки по данной поверхности или линіи сопровождается треніемъ, то поверхность или линія называются **шероховатыми**.

Законы тренія для движенія матеріальной точки по неподвижной шероховатой поверхности слѣдующе

1) Сила тренія направлена прямо противоположно скорости точки.

2) Величина силы тренія равняется kN , гдѣ k некоторая постоянная, называемая коэффициентомъ тренія, а N абсолютная величина нормальной реакціи поверхности.

3) Когда точка находится на поверхности въ покоѣ, сила тренія равняется абсолютной величинѣ проекціи равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ, на касательную къ поверхности плоскость и направлена прямо противоположно этой проекціи; но по своей величинѣ сила тренія не можетъ превышать $k_1 N$, гдѣ k_1

нѣкоторая постоянная, называемая коэффициентомъ статическаго тренія, а N нормальная реакція связи.

Вообще говоря, $k_1 > k$.

Для движенія точки по шероховатой кривой предыдущіе законы измѣнятся такъ:

1) Сила тренія всегда направлена по касательной къ кривой прямопротивоположно скорости точки.

2) По своей величинѣ сила тренія равняется kN , гдѣ k коэффициентъ тренія, а N абсолютная величина нормальной реакціи кривой.

3) Когда точка находится въ покое на кривой, то сила тренія равна и прямопротивоположна проекции равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ, на касательную къ кривой, но не можетъ быть больше, чѣмъ $k_1 N$, гдѣ k_1 коэффициентъ статическаго тренія, а N абсолютная величина реакціи.

138. Дифференціальныя уравненія движенія точки по шероховатой поверхности. Пусть уравненіе данной поверхности

$$f(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

Тогда по §§ 126 и 137 уравненія движенія точки массы m въ декартовыхъ координатахъ будутъ:

$$\begin{aligned} mx'' &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - k\lambda \Delta f \frac{x'}{r}; \\ my'' &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - k\lambda \Delta f \frac{y'}{r}; \\ mz'' &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - k\lambda \Delta f \frac{z'}{r}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здѣсь k коэффициентъ тренія, а $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ — прочія обозначенія тѣ же, что и въ формулахъ (2) главы XV. Знакъ при k противоположенъ знаку у λ .

Если же отнести уравненія движенія къ подвижнымъ осямъ формулъ (11) главы XV, то при тѣхъ же обозначеніяхъ получимъ

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F \cos(F, T) - kN; \\ m \frac{v^2}{R} &= F \cos(F, n) + N; \\ m \frac{v^2}{G} &= F \cos(F, \tau). \end{aligned} \quad (3)$$

И здѣсь знакъ при k противоположенъ знаку реакціи N .

139. Движеніе тяжелой точки по шероховатой наклонной плоскости. Возьмемъ начало координатъ на данной плоскости наклонной подъ угломъ J къ горизонтальной. Направимъ Ox горизонтально по той же плоскости, а Oy проведемъ вниз по линіи главнаго ската, т. е. перпендикулярно къ линіямъ пересѣченія данной плоскости горизонтальными. Разсмотримъ движеніе тяжелой точки по взятой наклонной плоскости, предполагая, что послѣдняя шероховата. При выбранныхъ осяхъ уравненіе плоскости будетъ:

$$z = 0 \quad (4)$$

Уравненія движенія по (2) и (4) напишутся такъ:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= k\lambda \frac{x}{r}; \\ m\ddot{y} &= mg \sin J - k\lambda \frac{y}{r}; \\ m\ddot{z} &= 0 = -mg \cos J + \lambda. \end{aligned} \quad (5)$$

Oz направлена по нормали къ плоскости вверхъ; g ускореніе тяжести.

Изъ послѣдняго уравненія (5) находимъ

$$\lambda = mg \cos J.$$

Подставляя въ первыя два уравненія (5) и сокращая на массу, имѣемъ

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{kq \cos J}{r} x'; \\ \ddot{y} &= g \sin J - \frac{kg \cos J}{r} y'. \end{aligned}$$

Для сокращенія полагаемъ:

$$g \sin J = \gamma; \quad kg \cos J = K\gamma; \quad (6)$$

откуда

$$K = k \cot J. \quad (7)$$

При такихъ обозначеніяхъ уравненія движенія перепишутся слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} x'' &= -K \gamma \frac{d}{dt}; \\ y'' &= \gamma (1 - K \sin \varphi). \end{aligned} \quad (8)$$

Означимъ черезъ φ уголъ скорости v съ Ox , т. е. положимъ:

$$x' = \frac{dx}{dt} = v \cos \varphi; \quad y' = \frac{dy}{dt} = v \sin \varphi. \quad (9)$$

Тогда окажется

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{dv}{dt} \cos \varphi - v \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}; \\ y'' &= \frac{dv}{dt} \sin \varphi + v \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}; \end{aligned}$$

Подставляя отсюда въ (8), найдемъ

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} \cos \varphi - v \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} &= -K \gamma \cos \varphi; \\ \frac{dv}{dt} \sin \varphi + v \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} &= \gamma (1 - K \sin \varphi). \end{aligned}$$

Опредѣляемъ производныя $\frac{dv}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -K \gamma + \gamma \sin \varphi; \\ v \frac{d\varphi}{dt} &= \gamma \cos \varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Изъ этихъ уравненій выводимъ:

$$\frac{dv}{v} = (tg \varphi - K \sec \varphi) d\varphi.$$

Интегрируя, находимъ:

$$\log t = \log \cos \varphi + K \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + \log 2C,$$

гдѣ C произвольное постоянное, или

$$t = 2C \frac{\operatorname{tg}^K \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi}. \quad (11)$$

Пусть

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \eta; \quad (12)$$

тогда

$$\cos \varphi = \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}; \quad (13)$$

и слѣд. по (11):

$$t = C \eta^{K-1} (1 + \eta^2) = C \left(\eta^{K-1} + \eta^{K+1} \right). \quad (14)$$

Изъ (13) вытекаетъ:

$$d\varphi = \frac{2d\eta}{1 + \eta^2}; \quad (15)$$

поэтому для опредѣленія t по (10) имѣемъ уравненіе

$$dt = \frac{v d\varphi}{\gamma \cos \varphi} = - \frac{C}{\gamma} \eta^{K-2} (1 + \eta^2) d\eta,$$

и слѣдовательно:

$$t - t_1 = - \frac{C}{\gamma} \left(\frac{\eta_1^{K-1}}{K-1} - \frac{\eta^{K+1}}{K+1} \right), \quad (16)$$

гдѣ t_1 произвольная постоянная.

Чтобы окончить задачу, остается еще найти x и y какъ функций отъ τ . Изъ (9) и (10) имѣемъ:

$$dx = r \cos \varphi dt = \frac{2C}{\gamma} \tau_1^{2K-2} (1 - \tau_1^2) d\tau_1;$$

$$dy = r \sin \varphi dt = \frac{C^2}{\gamma} \tau_1^{2K-3} (1 - \tau_1^2) d\tau_1;$$

Отсюда, интегрируя, находимъ:

$$x = x_1 + \frac{2C^2}{\gamma} \tau_1^{2K-1} - \frac{\tau_1^{2K+1}}{2K-1}, \quad (17)$$

$$y = y_1 - \frac{C^2}{\gamma} \tau_1^{2K-2} - \frac{\tau_1^{2K+2}}{2K+2}, \quad (18)$$

гдѣ x_1 и y_1 постоянныя произвольныя.

Пусть постоянная K , равная $k \cot \eta J$ по (7), больше единицы:

$$K > 1. \quad (19)$$

Тогда видимъ, что r по (14) обращается въ нуль для $\tau_1 = 0$. Случится это по (16) въ моментъ $t = t_1$, когда точка придетъ въ положеніе $x = x_1$, $y = y_1$ по (17) и (18). Нормальная реакція связи N по (5) равняется $mg \cos J$, а проекція равнодѣйствующей на плоскость равна $mg \sin J$, слѣд. отношеніе

$$\frac{mg \sin J}{N} = \tan J < k,$$

по (19); а потому движущаяся точка въ положеніи (x_1, y_1) останется въ покое (§ 137) и слѣд. въ моментъ $t = t_1$ движеніе пріостановится.

Если

$$1 > K > \frac{1}{2},$$

то для $\tau_1 = 0$ находимъ $t = t_1$, но $x = x_1$, слѣд. движеніе не прекращается. но траекторія имѣетъ асимптоту, параллельную Oy .

Наконецъ, при условіи

$$\frac{1}{2} K,$$

движеніе происходитъ безостановочно и траекторія асимптоты не имѣетъ.

140. Движеніе точки по шероховатой поверхности по инерціи. Положимъ, что матеріальная точка движется по шероховатой поверхности безъ приложенныхъ силъ. Примѣняя сюда уравненія типа (3), находимъ:

$$m \frac{dv}{dt} = kN; \quad \frac{mv^2}{R} = N; \quad \frac{mv^2}{R} = 0.$$

Последнее уравненіе опредѣляетъ собою траекторію: она оказывается геодезическою линіею, какъ и для поверхности гладкой. Исключая изъ первыхъ двухъ уравненій реакцію N , имѣемъ:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{kv^2}{R}.$$

Замѣчаемъ, что $v dt = ds$, если ds элементъ дуги траекторіи: слѣд.

$$\frac{2v dv}{v^2} = -2k \frac{ds}{R}.$$

Отсюда, интегрируя:

$$v = C e^{-2k \int \frac{ds}{R}},$$

гдѣ C произвольная постоянная. Иначе

$$v^2 = v_0^2 e^{-2k \int_{s_0}^s \frac{ds}{R}},$$

если v_0 начальная скорость, соответствующая дугѣ s_0 .

141. Дифференціальныя уравненія движенія точки по шероховатой кривой. Возьмемъ дифференціальныя уравненія движенія точки

по кривой въ формѣ (10) § 132; тогда по § 137 при прежнихъ обозначеніяхъ найдемъ:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F \cos(FT) - hN; \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F \cos(F\rho) + N \cos(N\rho); \\ 0 &= F \cos(Fn) + N \cos(Nn). \end{aligned} \quad (20)$$

Знакъ h противоположенъ знаку при N .

Когда кривая плоская и сила F лежитъ въ той же плоскости, послѣднее изъ уравненій (20) показываетъ, что вся реакція направлена по радіусу кривизны ρ .

142. Движеніе тяжелой точки по вертикальной шероховатой циклоидѣ. Пусть тяжелая точка движется по вертикальной шероховатой циклоидѣ, обращенной вершиною книзу. При соотвѣтственно выбранныхъ осяхъ уравненіе циклоиды по (16) § 134 можемъ написать такъ:

$$\begin{aligned} x &= R(2\psi - \sin 2\psi); \\ y &= R(1 + \cos 2\psi); \end{aligned}$$

если въ формулахъ (16) § 134 положимъ $\omega = 2\psi$. Параллельно съ этимъ изъ того же § 134 имѣемъ выраженія

$$s = 4R \sin \psi; \quad \rho = 4R \cos \psi; \quad (21)$$

здѣсь ρ радіусъ кривизны, а s длина дуги, считаемая отъ вершины, т. е. самой нижней точки кривой.

Предположимъ, что движеніе точки началось изъ состоянія покоя, тогда проекція скорости v на касательную въ сторону движенія (книзу) будетъ $-\frac{ds}{dt}$, такъ какъ дуга s убываетъ, а потому

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{d^2s}{dt^2} = -s''$$

и слѣд. уравненія (20) въ нашемъ случаѣ даютъ:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -s'' = -g \sin \psi - hR, \\ \frac{v^2}{\rho} &= \frac{s'^2}{\rho} = -g \cos \psi - R. \end{aligned} \quad (22)$$

Здѣсь g ускореніе тяжести, $R = \frac{1}{m} N$.

Исключая изъ (22) реакцію R , получаемъ.

$$s' = \frac{k}{\rho} s = g(\sin \psi - k \cos \psi).$$

Вставляемъ сюда значенія для s и ρ изъ (21) и полагаемъ

$$k = \tan \lambda.$$

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$- \cos \psi \cdot \psi'' = \frac{\sin(\frac{\psi}{\cos \lambda})}{\cos \lambda} \psi' = \frac{g}{4R \cos \lambda} \sin(\psi - \lambda).$$

Вводимъ новую переменную φ , принимая

$$\varphi = \psi - \lambda; \quad (24)$$

тогда по раздѣленіи на $\cos \lambda$ легко приведемъ предъидущее уравненіе въ виду:

$$\begin{aligned} \cos \varphi \cdot \varphi'' &= \sin \varphi \cdot k \cdot \varphi' + \sin \varphi \cdot \varphi' - 2k \cos \varphi \cdot \varphi' - k^2 \sin \varphi \cdot \varphi' \\ &= \frac{g}{4R \cos^2 \lambda} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Умножаемъ обѣ части уравненія на $e^{-k\varphi}$; видимъ, что оно можетъ быть преобразовано такъ:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-k\varphi} \sin \varphi \right) = \frac{g}{4R \cos^2 \lambda} e^{-k\varphi} \sin \varphi = 0.$$

Общій интегралъ этого уравненія легко находится въ видѣ:

$$e^{-k\varphi} \sin \varphi = A \cos(\gamma t + B),$$

гдѣ A и B постоянныя произвольныя, а

$$\gamma = \frac{1}{2 \cos \lambda} \sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (25)$$

Такъ какъ по условію въ начальный моментъ ($t = 0$) точка была въ покой ($\varphi = 0$), то постоянная $B = 0$; и слѣд. интеграль въ окончательной формѣ:

$$e^{-k\gamma} \sin \varphi = A \cos \gamma t.$$

По истеченіи времени

$$T = \frac{\pi}{2\gamma} = \pi \cos \lambda \quad \left. \begin{array}{l} \text{и} \\ \text{и} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{и} \\ \text{и} \end{array}$$

точка придетъ въ положеніе $\varphi = 0$ со скоростью $\dot{\varphi} = A\gamma$. Такъ какъ промежутокъ T не зависитъ отъ начальныхъ условій, движеніе обладаетъ свойствомъ таутохронности. Замѣтимъ, что въ положеніи $\varphi = 0$ тяжелая точка на кривой можетъ быть въ равновѣсїи. На самомъ дѣлѣ тогда $\psi = \lambda$ по (24), и слѣд. N по (22) равняется $mg \cos \lambda$, такъ какъ $v = 0$; проекція равнодѣйствующей F на касательную T выражается такъ:

$$F \cos (F T) = mg \sin \psi = mg \sin \lambda.$$

А потому отношеніе

$$\frac{F \cos (F T)}{N} = \operatorname{tg} \lambda = k,$$

т. е. условіе § 187 выполняется.

ГЛАВА XVIII.

Относительное движение материальной точки.

143. Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія матеріальной точки. Положимъ, что разсматриваемая матеріальная точка m движется одновременно въ двухъ средахъ S и Σ , и пусть намъ дано движеніе Σ въ S , тогда движеніе m въ Σ называется относительнымъ (§ 79). Въ § 79 было показано, какъ это движеніе находится, если извѣстны движенія абсолютное и переносное. Но можно также и непосредственно опредѣлить относительное движеніе интегрированіемъ дифференціальныя уравненій для этого движенія. Чтобы составить эти уравненія, припомнимъ, что положеніе точки m въ средѣ Σ опредѣляется посредствомъ координатъ ξ, η, ζ (§ 79), взятыхъ относительно осей $A\xi\eta\zeta$ неизмѣнно съ тѣломъ Σ связанныхъ, слѣд. искомыя уравненія будутъ содержать въ себѣ ξ, η, ζ , какъ неизвѣстныя функции времени. По теоремѣ Кориолиса (§ 81) ускореніе относительное \ddot{u} такъ связано съ ускореніями абсолютнымъ \ddot{v} , переноснымъ \ddot{w} и поворотнымъ \dot{k} :

$$(\ddot{u}) = (\ddot{v}) - (\ddot{w}) + (k), \quad (1)$$

Станемъ проектировать эти векторы на $A\xi$. Тогда по (6) § 81:

$$u \cos(\dot{u} \xi) = \xi''.$$

Если проекція равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ m , на оси $A\xi\eta\zeta$ означимъ соответственно Ξ, Y, Z , то по второму закону Ньютона, имѣемъ

$$\dot{u} \cos(\dot{u} \xi) = \frac{1}{m} \Xi,$$

гдѣ m масса точки.

Переносное ускорение по определению представляет собою ускорение той точки твердого тела Σ , которая въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ съ движущеюся, слѣд. проекція этого ускоренія найдется изъ (4) § 77:

$$\dot{\zeta} \cos(h \xi) = \alpha - \zeta q' - \eta r' + p(p\xi' - q\eta' - r\zeta') - \xi\Omega',$$

если проекція поступательнаго ускоренія на оси $A\xi\eta\zeta$ означимъ для сокращенія черезъ $\alpha, \alpha', \alpha''$.

Наконецъ ускорение поворотное по § 81 даетъ проекцію:

$$h \cos(h \xi) = 2(\eta'r - \zeta'q).$$

Собирая все вышесказанное, по (1) находимъ:

$$\xi'' - \frac{1}{m} \Xi = \alpha - \zeta q' - \eta r' + p(p\xi' - q\eta' - r\zeta') - \xi\Omega' + 2(\eta'r - \zeta'q). \quad (2)$$

Сюда присоединяются еще два уравненія.

$$\eta'' - \frac{1}{m} \Upsilon = \alpha' - \xi q' - \zeta r' + q(p\xi' - q\eta' - r\zeta') - \eta\Omega' + 2(\xi'p - \zeta'r); \quad (2')$$

$$\zeta'' - \frac{1}{m} Z = \alpha'' - \eta p' + \xi q' - r(p\xi' + q\eta' + r\zeta') + \zeta\Omega' - 2(\xi'q - \eta'p).$$

Полученныя равенства (2) и представляютъ собою искомыя дифференціальныя уравненія относительнаго движенія свободной матеріальной точки.

Если точка не свободна, а лежитъ на связи:

$$f(\xi, \eta, \zeta, t) = 0, \quad (3)$$

то уравненія (2) по § 123 перейдутъ въ слѣдующія:

$$\begin{aligned} \xi'' - \frac{1}{m} \Xi &= \alpha - \zeta q' - \eta r' + p(p\xi' - q\eta' - r\zeta') - \xi\Omega' + 2(\eta'r - \zeta'q) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \xi}, \\ \eta'' - \frac{1}{m} \Upsilon &= \alpha' - \xi q' - \zeta r' + q(p\xi' - q\eta' - r\zeta') - \eta\Omega' + 2(\xi'p - \zeta'r) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \eta}, \\ \zeta'' - \frac{1}{m} Z &= \alpha'' - \eta p' + \xi q' - r(p\xi' + q\eta' + r\zeta') + \zeta\Omega' - 2(\xi'q - \eta'p) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Интегрированіе этихъ уравненій ведется пріемомъ, указаннымъ въ § 123. Для исключенія неизвѣстной функціи λ придется воспользоваться равенствомъ

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \xi'' + \frac{\partial f}{\partial \eta} \eta'' + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \zeta'' + D_2 f = 0,$$

куда надо вставить значенія ξ'', η'', ζ'' , изъ (4); тогда λ и найдется какъ функція аргументовъ $t, \xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$.

Когда связей не одна, а двѣ:

$$f(\xi, \eta, \zeta, t) = 0; f_1(\xi, \eta, \zeta, t) = 0,$$

то къ правымъ частямъ уравненій (4) присоединятся члены

$$\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial \zeta};$$

исключеніе множителей λ_1 и λ_2 надо сдѣлать по приему § 125

144. Интеграль. производный отъ интеграла живой силы. Пусть силы, приложенныя къ точкѣ, имѣютъ потенциалъ, т. е.

$$\Xi = \frac{\partial U}{\partial \xi}; \quad \Upsilon = \frac{\partial U}{\partial \eta}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial \zeta};$$

а переносное движеніе сводится къ постоянному вращенію около оси, не измѣняющей своего положенія въ тѣлѣ и движущейся безъ ускоренія; въ такомъ случаѣ для уравненій (4), если связь явно не содержитъ времени:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

можно получить интеграль, аналогичный интегралу живой силы.

Выбираемъ полюсъ A на оси вращенія; тогда по условію:

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0.$$

Далѣе p, q, r, ω постоянны; поэтому

$$p' = q' = r' = 0.$$

Умножаемъ уравненія (4) соответственно на ξ, η, ζ и складываемъ:

$$\begin{aligned} \xi' \xi'' + \eta' \eta'' + \zeta' \zeta'' &= \frac{1}{m} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} \eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \zeta \right) - \\ (p\xi' - q\eta' - r\zeta')(p\xi'' - q\eta'' - r\zeta'') &= \Omega'(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') \\ &+ \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \xi' + \frac{\partial f}{\partial \eta} \eta' + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \zeta' \right). \end{aligned}$$

Коэффициентъ при λ обращается въ нуль въ силу соотношенія между относительными скоростями:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \xi' + \frac{\partial f}{\partial \eta} \eta' + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \zeta' + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

и условія (5), остальные же члены представляютъ собою полныи производныя по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{m} \frac{dU}{dt} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\Omega^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (p\xi + q\eta + r\zeta)^2]. \end{aligned} \quad (6)$$

Если замѣтимъ, что

$$\begin{aligned} p &= \Omega \cos(\Omega \xi); \quad q = \Omega \cos(\Omega \eta); \quad r = \Omega \cos(\Omega \zeta); \\ \xi &= \rho \cos(\rho \xi); \quad \eta = \rho \cos(\rho \eta); \quad \zeta = \rho \cos(\rho \zeta); \end{aligned}$$

то легко видѣть, что

$$\Omega^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (p\xi + q\eta + r\zeta)^2 = \Omega^2 \rho^2 \sin^2(\rho \Omega).$$

Интегрируя (6), и опредѣляемъ искомое выраженіе

$$\frac{m}{2} [u^2 - \Omega^2 \rho^2 \sin^2(\Omega \rho)] = U + h, \quad (7)$$

гдѣ h произвольная постоянная.

145. Движеніе тяжелой точки по отношенію къ вращающейся землѣ. Въ видѣ примѣра рассмотримъ движеніе тяжелой матеріальной точки по отношенію къ вращающейся землѣ. Ускореніе g , сообщаемое точкѣ притяженіемъ земли, мы принимаемъ за постоянное относительно подвижныхъ осей $A\xi\eta\zeta$. Начало этихъ осей взято въ томъ мѣстѣ земной поверхности, близъ котораго происходитъ движеніе, въ большинствѣ случаевъ мы будемъ полагать, что A совпадаетъ съ начальнымъ положеніемъ точки. Сами же оси неизмѣнно связаны съ землею.

По формулѣ (1) ускореніе относительное \ddot{u} разсматриваемой тяжелой точки такъ выражается черезъ ускореніе абсолютное \ddot{v} , переносное \dot{w} и поворотное k :

$$(\ddot{u}) = (\ddot{v}) - (\dot{w}) + (k). \quad (8)$$

Проекциями вектора $\dot{\mathbf{i}}$ на оси $A\xi\eta\zeta$ служат соответственно количества:

$$\xi'', \eta'', \zeta''. \quad (9)$$

Ускорение абсолютное $\ddot{\mathbf{i}}$ тяжелой точки слгаается изъ двухъ: ускоренія тяжести g , направленнаго къ центру земли, если землю примемъ за однородную сферу, и ускоренія, зависящаго отъ притяженія точки солнцемъ по Ньютонову закону, равнаго

$$\varepsilon^2 \frac{M}{d^2}, \quad (10)$$

направленнаго къ центру солнца, если и солнце будемъ считать однородною сферою. Здѣсь M масса солнца, d разстоянiе отъ тяжелой точки до солнечнаго центра, а ε^2 постоянная, равная силѣ притяженія между двумя массами по одному грамму, находящимися другъ отъ друга на разстоянiи, равномъ одному сантиметру Такиимъ образомъ

$$(\ddot{v}) = (g) + \left(\varepsilon^2 \frac{M}{d^2} \right), \quad (11)$$

а проекціи $\ddot{\mathbf{i}}$ на оси $A\xi\eta\zeta$ будутъ соответственно:

$$g \cos(g\xi) - \varepsilon^2 \frac{M}{d^3} \cos(d\xi), \quad d \cos(\eta\xi) - \varepsilon^2 \frac{M}{d^3} \cos(d\eta),$$

$$g \cos(g\zeta) - \varepsilon^2 \frac{M}{d^3} \cos(d\zeta), \quad (12)$$

если направление d идетъ отъ солнца къ точкѣ

Переносное ускореніе $\ddot{\mathbf{i}}$ (§§ 76 и 77) слгаается изъ трехъ ускореній: поступательнаго, вращательнаго и центробежнаго.

Если бы мы за полюсъ взяли центръ земли, то полное движеніе земли слгалось бы изъ поступательнаго движенія съ ускореніемъ, зависящемъ отъ притяженія земли солнцемъ, и изъ постояннаго вращенія съ угловою скоростью Ω около оси, идущей отъ сѣвернаго полюса къ южному. Явленія прецессіи и нутаціи въ расчетъ не принимаются. Постоянная угловая скорость Ω равна (§ 81)

$$0,0000729 \frac{1}{\text{сек. ср. вр.}}.$$

Въ виду малости Ω мы будемъ пренебрегать членами, зависящими отъ Ω^2 , если только коэффициентъ при нихъ не очень великъ, напр. не содержитъ радіуса земли.

Вышеупомянутое ускореніе поступательнаго движенія при нашихъ предположеніяхъ (земля и солнце однородныя сферы) представится такъ:

$$\varepsilon = \frac{M}{D^2}, \quad (13)$$

гдѣ M по прежнему масса солнца, а D разстояніе между центрами солнца и земли. Ускореніе (13) направлено отъ земли къ солнцу. Проекціи его на оси $A\xi\eta\zeta$ будутъ:

$$\varepsilon^2 \frac{M}{D^2} \cos(D\xi), \quad -\varepsilon^2 \frac{M}{D^2} \cos(D\eta), \quad -\varepsilon^2 \frac{M}{D^2} \cos(D\zeta), \quad (14)$$

если направление D идетъ отъ солнца къ землѣ.

Но мы за полюсъ беремъ не центръ земли, а точку A ; при этомъ (§ 68) величина и направленіе вектора Ω не измѣнятся, но поступательная часть движенія станетъ нулю. Для нахождения поступательнаго ускоренія при полюсѣ, выбранномъ въ точкѣ A , необходимо къ ускоренію (13) прибавить геометрически то ускореніе, которое имѣетъ точка A въ своемъ вращательномъ движеніи вокругъ прежняго полюса, центра земли. Это добавочное ускореніе въ свою очередь складается изъ двухъ: вращательнаго и центростремительнаго. Первое, вращательное, равно нулю, такъ какъ векторъ Ω мы считаемъ постояннымъ, а второе равно $\Omega \cdot \delta$, гдѣ δ разстояніе точки A отъ земной оси; направленіе δ идетъ отъ точки A къ оси. Такимъ образомъ, при полюсѣ въ A поступательное ускореніе равно геометрической суммѣ

$$\left(\varepsilon^2 \frac{M}{D^2} \right) + (\Omega^2 \delta) \quad (15)$$

и имѣетъ своими проекціями на оси $A\xi\eta\zeta$ слѣдующія выраженія:

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \frac{M}{D^2} \cos(D\xi) + \Omega^2 \delta \cos(\delta\xi), \quad & \varepsilon^2 \frac{M}{D^2} \cos(D\eta) - \Omega^2 \delta \cos(\delta\eta), \\ \varepsilon^2 \frac{M}{D^2} \cos(D\zeta) - \Omega^2 \delta \cos(\delta\zeta). \end{aligned} \quad (16)$$

Полное переносное ускореніе \ddot{r} получится изъ (15), если мы прибавимъ сюда геометрически еще ускоренія вращательное и

центростремительнаго той точки, неизмѣнно связанной съ землею, которая въ данный моментъ совпадаетъ съ разсматриваемою тягелою точкою. При подсчетеи плаванныхъ ускореній надо помнить, что мгновенная ось проходить черезъ полюсъ A ; поэтому въ виду постоянства Ω и малости численной величины этого вектора оба добавочныя ускоренія обращаются въ нуль, и слѣд. въ нашей степени приближенія выраженіе (15) дастъ полную величину вѣсто ускоренія переносаго.

Наконецъ по (10) § 81 проекціи ускоренія поворотнаго k будутъ

$$2(\eta' r - \zeta' q), 2(\zeta' p - \xi' r), 2(\xi' q - \eta' p). \quad (17)$$

Теперь вмѣсто (8) имѣемъ:

$$(m) \quad (q) \quad \left(\varepsilon^2 \frac{M}{r^3} \right) \quad \left(\varepsilon \frac{M}{P^2} \right) \quad (\Omega \delta) \quad (h) \quad (18)$$

Въ виду громадности разстоянія солнца отъ земли въ сравненіи съ земнымъ радиусомъ мы принимаемъ, что ускоренія (10) и (13) равны по величинѣ и одинаково направлены, слѣд. второй и третій члены правой части геометрическаго равенства (18) взаимно сокращаются.

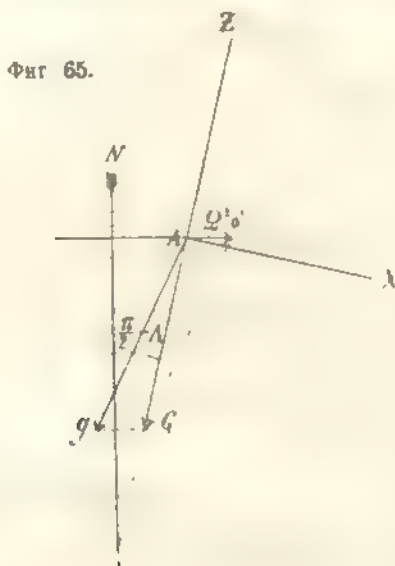
Принимая въ соображеніе все вышесказанное, а также формулы (12), (16) и (17), пишемъ по (18) уравненія относительнаго движенія тяжелой точки въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} \xi'' &= q \cos(q \xi) - \Omega^2 \delta \cos(\delta \xi) - 2(\zeta' q - \eta' r); \\ \eta'' &= q \cos(q \eta) - \Omega^2 \delta \cos(\delta \eta) - 2(\xi' r - \zeta' p); \\ \zeta'' &= q \cos(q \zeta) - \Omega^2 \delta \cos(\delta \zeta) - 2(\eta' p - \xi' q). \end{aligned} \quad (19)$$

Здѣсь, по условію, изъ вѣсѣхъ членовъ, содержащихъ Ω^2 , сохранены лишь тѣ, при которыхъ стоитъ множитель δ , такъ какъ разстояніе δ при низкихъ широтахъ сравнимо съ радиусомъ экватора.

Разсмотримъ векторъ G геометрическую разность вектора q и вектора $\Omega \delta$, идущаго къ земной оси. Иначе этотъ векторъ G (Фиг. 65) равенъ геометрической суммѣ векторовъ q и $\Omega \delta$, если послѣднему дадимъ направленіе отъ земной оси (ускореніе центробѣжное). Очевидно, векторъ G представляетъ собою видимое (наблюдаемое) ускореніе вѣса на земной поверхности; направленіе G совпадаетъ съ направленіемъ отвѣса въ разсматриваемомъ мѣстѣ

Оставивъ прежнее начало A , замѣнимъ оси $A\xi\eta\zeta$ осями $A\Lambda YZ$, причѣмъ направимъ AZ (Фиг. 65) прямопротивоположно G (къ зениту); ось $A\Lambda$ пусть идетъ въ плоскости меридіана къ югу; тогда AY будетъ направлена къ западу. Уголъ $с$ осей AZ съ плоскостью



земного экватора называется астрономическою широтою мѣста A ; означимъ эту широту черезъ Λ . Такъ какъ ось земли идетъ отъ сѣвернаго полюса N (Фиг. 65) къ южному S и лежитъ въ плоскости меридіана (плоскости чертежа), то, очевидно, она образуетъ съ AZ уголъ $\frac{\pi}{2} - \Lambda$ и слѣд

$$p = \Omega \cos \Lambda; \quad q = 0; \quad r = -\Omega \sin \Lambda.$$

Поэтому для новыхъ осей $AZY\Lambda$ уравненія (9) перепишутся такъ:

$$\begin{aligned} x'' &= -2y' \Omega \sin \Lambda; \\ y'' &= 2x' \Omega \sin \Lambda + 2z' \Omega \cos \Lambda; \\ z'' &= -G - 2y' \Omega \cos \Lambda. \end{aligned} \quad (20)$$

Это и будутъ уравненія относительнаго движенія тяжелой точки при нашихъ допущеніяхъ.

Выводя уравнения (20), мы пренебрегаем членами, зависящими от Ω^2 ; съ тою же степенью точности мы можем примѣнить для интегрированія этихъ уравненій слѣдующій приемъ. Каждая часть уравненій (20) представляетъ собою полную производную по времени. Интегрируя и обозначая начальныя скорости по осямъ для $t = 0$ черезъ x_0' , y_0' , z_0' , получаемъ:

$$x' = x_0' - 2y\Omega \sin \Lambda;$$

$$y' = y_0' + 2x\Omega \sin \Lambda + 2z\Omega \cos \Lambda;$$

$$z' = z_0' - Gt - 2y\Omega \cos \Lambda.$$

Начальное положеніе точки взято въ началѣ координатъ. $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Подставляя найденныя значенія для x , y , z въ уравненія (20) и пренебрегая членами съ Ω^2 , имѣемъ:

$$x'' = -2y_0'\Omega \sin \Lambda;$$

$$y'' = 2G + 2x_0'\Omega \cos \Lambda - 2x_0'\Omega \sin \Lambda - 2z_0'\Omega \cos \Lambda;$$

$$z'' = -G - 2y_0'\Omega \cos \Lambda.$$

Интегрированіе этихъ уравненій даетъ непосредственно

$$x = x_0' t - y_0' \Omega \sin \Lambda t^2;$$

$$y = y_0' t + \frac{G}{3} t^3 + 2x_0' \Omega \cos \Lambda t - 2x_0' \Omega \sin \Lambda t - 2z_0' \Omega \cos \Lambda t^2; \quad (21)$$

$$z = z_0' t - \frac{G}{2} t^2 - y_0' \Omega \cos \Lambda t^2.$$

Какъ видимъ, ускореніе по вертикали

$$G + 2y_0'\Omega \cos \Lambda$$

зависитъ отъ начальныхъ условій.

Въ общемъ случаѣ траекторія кривая не плоская.

Когда точка падаетъ безъ начальной скорости, $x_0' = y_0' = z_0' = 0$, уравненія (21) даютъ:

$$x = 0; y = -\frac{G}{3} \Omega \cos \Lambda t^3; z = -\frac{Gt^2}{2}.$$

Траекторія лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ меридіану. Точка падаетъ не по вертикали, а даетъ отклоненіе къ востоку ($y < 0$).

Когда точка брошена вертикально кверху $y_0 = x_0 = 0$, $z_0' = u_0 > 0$; изъ (21) имѣемъ:

$$x = 0, \quad y = \left(u_0 - \frac{Gt}{3}\right) \Omega \cos \Lambda t; \quad z = u_0 t - \frac{Gt^2}{2}$$

Движеніе въ плоскости перпендикулярной къ меридіану. Точка останавливается въ моментъ $t_1 = \frac{u_0}{G}$ и тогда замѣчается

отклоненіе къ западу: $y_1 = \frac{2}{3} \frac{u_0^3}{G^2} \Omega \cos \Lambda$. Точка снова падаетъ на

горизонтальную плоскость $z = 0$ въ моментъ $t_2 = \frac{2u_0}{G}$ съ отклоненіемъ въ западу:

$$y_2 = 2y_1 = \frac{4}{3} \frac{u_0^3}{G^2} \Omega \cos \Lambda.$$

146. Маятникъ Фуко. Задача о маятникѣ Фуко въ первомъ приближеніи можетъ быть сформулирована такъ: опредѣлить относительное движеніе тяжелой точки по сферѣ, неизмѣнно связанной съ вращающеюся землею. Беремъ оси тѣ же, что и въ предыдущемъ параграфѣ; пусть тогда уравненіе связи будетъ:

$$l^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$$

Пользуясь уравненіями (4), находимъ въ нашемъ случаѣ такія приближенныя уравненія относительнаго движенія

$$\begin{aligned} x'' &= -2y \Omega \sin \Lambda - 2\lambda x; \\ y'' &= 2x' \Omega \sin \Lambda + 2x \Omega \cos \Lambda - 2\lambda y; \\ z'' &= -G - 2y \Omega \cos \Lambda - 2\lambda z. \end{aligned} \quad (22)$$

Степень точности у нихъ та же, что и для уравненій (20)

Если умножить уравненія (22) соответственно на x , y , z и сложить, то получимъ

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u^2) = -Gz, \quad (23)$$

откуда, интегрируя.

$$u^2 = 2h - 2Gx, \quad (23)$$

гдѣ h произвольное постоянное.

Очевидно, равенство (23) представляет собою ничто иное, какъ интеграль (7), въ которомъ по принятому нами въ § 145 условію опущены члены, зависящій отъ Ω' .

Умножая первое изъ уравненій (12) на u , а второе на v и вычитая, легко находимъ:

$$xu - yv = 2\Omega \sin \Lambda (xx' - yy') = 2\Omega \cos \Lambda z. \quad (24)$$

Вводимъ полярныя координаты, полагая

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi; \quad z = l - \rho^2. \quad (25)$$

Допустимъ, что отклоненія маятника отъ вертикали настолько малы, что мы можемъ пренебречь высшими степенями радіуса-вектора ρ . Тогда изъ (25)

$$z = -(l - \rho^2)^2 = -l + \frac{1}{2l} \rho^2; \quad x = \frac{1}{l} \rho \rho'. \quad (26)$$

Подставляя изъ (25) и (26) въ интеграль (23), получимъ

$$\left(1 - \frac{1}{l^2} \rho'^2\right) \rho'^2 + \rho^2 \psi'^2 = 2h - 2G \left(l - \frac{1}{2l} \rho^2\right)$$

или, если пренебрежемъ $\frac{\rho'^2}{l^2}$ передъ единицею.

$$\rho'^2 + \rho^2 \psi'^2 = 2H - \frac{G}{l} \rho^2, \quad (27)$$

если

$$H = h + Gl.$$

Подобнымъ образомъ выраженіе (24) даетъ

$$\frac{d}{dt} (\rho^2 \psi') = 2\Omega \sin \Lambda \rho \rho' + 2 \frac{\Omega}{l} \cos \Lambda \cos \psi \rho^2 \rho'.$$

Отбрасывая последний членъ, имѣемъ:

$$\frac{d}{dt} (\rho^2 \psi') = 2\Omega \sin \Lambda \rho \rho',$$

откуда, интегрируя:

$$\rho^2 \psi' = \Omega \sin \Lambda \rho^2 + C, \quad (28)$$

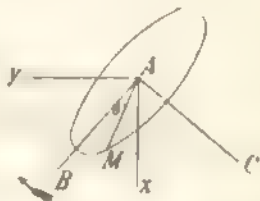
гдѣ C постоянная произвольная.

Отнесемъ движеніе точки M , проекціи тяжелой точки, на плоскость XOY , къ подвижнымъ осямъ $CA B$ (Фиг. 66), вращающимся равномерно около A съ угловою скоростью $\Omega \sin \Lambda$ отъ юга къ западу; тогда

$$\angle BAX = \Omega \sin \Lambda \cdot t + \Gamma,$$

гдѣ Γ нѣкоторая постоянная.

Фиг. 66



Если уголъ MAB назовемъ θ , то, такъ какъ $\angle MAX = \psi$, имѣемъ:

$$\theta + \psi = \Omega \sin \Lambda \cdot t + \Gamma. \quad (29)$$

Дифференцируя, найдемъ:

$$\theta' + \psi' = \Omega \sin \Lambda. \quad (30)$$

Подставляя отсюда въ (28), получимъ:

$$\rho^2 \theta' = -C = C'; \quad (31)$$

C' новое обозначеніе постоянной произвольной.

Интеграль живой силы (27) теперь приметъ видъ

$$\rho^2 \theta' = \rho^2 (\theta' + \psi' - \Omega \sin \Lambda \theta') + \Omega^2 \sin^2 \Lambda \rho^2 = 2H - \frac{G}{l} \rho^2$$

или, если воспользуемся равенством (31)

$$\rho'^2 + \rho^2 \theta'^2 = 2H_1 - k^2 \rho^2, \quad (32)$$

гдѣ

$$H_1 = H - C^2 \Omega \sin \Lambda; \quad k^2 = \frac{G}{l} = \Omega^2 \sin^2 \Lambda.$$

Сравнивая интегралы (31) и (32) съ формулами (3) и (4) § 115, видимъ, что точка M на подвижной плоскости ACB описываетъ центральную орбиту, соответствующую силовой функціи

$$U = -k^2 \rho^2$$

По (23) § 111 эта точка находится подъ дѣйствіемъ силы притяженія къ центру A пропорціонально разстоянію. Мы знаемъ (§ 101), что орбитой будетъ эллипсъ съ центромъ въ точкѣ A . Произвольною постоянною Γ можно всегда распорядиться такъ, чтобы координатныя оси BA' совпали съ осями эллипса (Фиг. 66).

Въ частномъ случаѣ, когда $\theta_0 = 0$, т. е. по (20):

$$\psi_0 = \Omega \sin \Lambda,$$

эллипсъ обращается въ отрезокъ прямой. $\theta = \text{const.}$

Если точка M въ начальный моментъ была въ относительномъ покоѣ, т. е.

$$\psi_0' = 0; \quad \rho_0' = 0;$$

тогда постоянныя интеграловъ (31) и (32) опредѣлятся такъ:

$$C^2 = \Omega \sin \Lambda \rho_1^2; \quad 2H_1 = k^2 \rho_0^2 = \rho_0^2 \Omega^2 \sin^2 \Lambda.$$

Интегралъ живой силы по исключеніи θ легко приводится къ виду:

$$\rho^2 \rho'^2 = k^2 (\rho_0^2 - \rho^2) (\rho^2 - \rho_1^2),$$

если

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{\Omega \sin \Lambda}{k}.$$

Отсюда заключаемъ, что для рассматриваемаго случая maximum и minimum ρ вѣд., что тоже, полуосями эллипса служатъ

$$\rho \text{ и } \rho_0 \frac{\Omega \sin \Lambda}{k}.$$

ГЛАВА XIX.

Мгновенныя силы. Ударъ точки о связь.

147. Импульсъ силы. Возьмемъ дифференціальныя уравненія движенія материальной точки, находящейся подъ дѣйствіемъ силы $F(X, Y, Z)$:

$$mx' = X; \quad my' = Y; \quad mz' = Z.$$

Принтегрируемъ эти равенства по времени между предѣлами $t = t_0$ и $t = t$; тогда получимъ:

$$\begin{aligned} mx' - mx_0' &= \int_{t_0}^t X dt; \\ my' - my_0' &= \int_{t_0}^t Y dt; \\ mz' - mz_0' &= \int_{t_0}^t Z dt; \end{aligned} \tag{1}$$

гдѣ x, y, z , скорости точки въ моментъ t .

Если движеніе точки m намъ дано, то X, Y, Z представляютъ собою извѣстныя функціи времени; тогда в опредѣленные интегралы, стоящіе въ правыхъ частяхъ равенствъ (1), могутъ быть найдены какъ функціи отъ времени. Векторъ J , координаты котораго равняются вышеупомянутымъ интеграламъ, носить названіе

импульса силы F за промежутокъ времени отъ момента t_0 до момента t . По сдѣланному опредѣленію:

$$\begin{aligned} J_x &= J \cos(Jx) = \int_{t_0}^t X dt; \\ J_y &= J \cos(Jy) = \int_{t_0}^t Y dt; \\ J_z &= J \cos(Jz) = \int_{t_0}^t Z dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда видимъ, что иначе мы могли бы опредѣлить импульсъ какъ векторъ-интегралъ по времени отъ вектора силы (§ 34).

Вообще говоря, направление импульса отлично отъ направленія силы; но, если сила постоянна по направленію, то направленія импульса и силы совпадаютъ. Дѣйствительно, пусть

$$X = F\alpha; \quad Y = F\beta; \quad Z = F\gamma; \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1;$$

α , β , γ постоянныя величины.

Тогда по (2):

$$\begin{aligned} J_x &= J \cos(Jx) = \alpha \int_{t_0}^t F dt; \\ J_y &= J \cos(Jy) = \beta \int_{t_0}^t F dt; \\ J_z &= J \cos(Jz) = \gamma \int_{t_0}^t F dt; \end{aligned}$$

Отсюда выводимъ:

$$J = \left| \int_{t_0}^t F dt \right|^2$$

и слѣд.

$$\cos(Jx) = \frac{J_x}{J} = \alpha = \cos(Fx);$$

$$\cos(Jy) = \frac{J_y}{J} = \beta = \cos(Fy);$$

$$\cos(Jz) = \frac{J_z}{J} = \gamma = \cos(Fz);$$

что и доказываетъ вышесказанное.

Каждую изъ координатъ импульса, напр J_x , можемъ считать импульсомъ соответственной координаты силы, въ нашемъ случаѣ, силы X .

Если означимъ черезъ μ и μ_0 количества движенія точки m въ моменты t и t_0 (§ 86) и замѣтимъ, что

$$mx = \mu \cos(\mu, x), \quad my = \mu \cos(\mu, y), \quad mz = \mu \cos(\mu, z);$$

$$m_0x = \mu_0 \cos(\mu_0, x), \quad m_0y = \mu_0 \cos(\mu_0, y), \quad m_0z = \mu_0 \cos(\mu_0, z);$$

то равенства (1) можемъ замѣнить такими:

$$\mu \cos(\mu, x) - \mu_0 \cos(\mu_0, x) = J \cos(Jx);$$

$$\mu \cos(\mu, y) - \mu_0 \cos(\mu_0, y) = J \cos(Jy);$$

$$\mu \cos(\mu, z) - \mu_0 \cos(\mu_0, z) = J \cos(Jz).$$

Отсюда вытекаетъ:

$$(\mu) - (\mu_0) = (J); \quad (3)$$

т. е. геометрическое приращеніе количества движенія за промежутокъ времени отъ t_0 до t геометрически равняется импульсу силы за тотъ же промежутокъ времени.

148. Теорема лорда Кельвина. Составимъ выраженіе для работы силъ за нѣкоторый промежутокъ времени черезъ ея импульсъ. Съ этою цѣлью возьмемъ равенства (1), умножимъ ихъ соответственно на x, y, z и сложимъ; тогда получимъ:

$$m(x' + y' + z') = m(x_0' + y_0' + z_0') + J_x x + J_y y + J_z z.$$

Если для момента t живую силу точки означимъ черезъ T , а скорость черезъ v , то предыдущему равенству можемъ дать видъ:

$$T = \frac{m}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} Jv \cos(Jv). \quad (4)$$

Умножая (4) на x , y , z и складывая, найдемъ:

$$m(xv_x + yv_y + zv_z) = m(x^2 + y^2 + z^2) = J_x v_x + J_y v_y + J_z v_z.$$

Если и здѣсь означимъ скорость точки и живую силу ея для момента t черезъ v и T , то можемъ написать:

$$\frac{m}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = T = \frac{1}{2} Jv \cos(Jv). \quad (5)$$

Складывая (4) и (5), находимъ:

$$T = T_0 + \frac{J}{2} \{v \cos(Jv) - v_0 \cos(Jv_0)\}. \quad (6)$$

Такъ какъ по закону живой силы (§ 109) разность $T - T_0$, или приращеніе живой силы за промежутокъ времени отъ t до t_0 равняется работѣ равнодѣйствующей за то же время, то правая часть выраженія (6) и представляетъ собою искомое выраженіе этой работы черезъ соответственный импульсъ.

Равенство (6) было впервые получено лордомъ Кельвиномъ и словами можетъ быть выражено такъ: работа силы за какой либо промежутокъ времени равняется импульсу силы за тотъ же промежутокъ, умноженному на полусумму проекцій начальной и конечной скорости точки приложенія силы на направленіе импульса.

149. Мгновенныя силы. До сихъ поръ мы разсматривали лишь такія движенія, въ которыхъ скорость точки измѣняетъ свою величину и свое направленіе сплошнымъ образомъ. Но иногда приходится припимать въ расчетъ и такія движенія, въ которыхъ скорость точки измѣняется скачкомъ. Для того, чтобы и подобныя движенія подвести подъ общую механическую схему, мы вводимъ понятіе о такъ называемыхъ мгновенныхъ силахъ.

Мгновенною называется сила, которая дѣйствуетъ въ теченіе безконечно малаго промежутка времени, но имѣетъ безконечно большое напряженіе, такъ что импульсъ ея за время дѣйствія оказывается величиною конечною.

Посмотримъ, какія слѣдствія вытекаютъ изъ сдѣланнаго опредѣленія.

Прежде всего замѣтимъ, что эффектъ дѣйствія мгновенной силы на материальную точку выразится въ мгновенномъ конечномъ измѣненіи скорости точки. Дѣйствительно по (1) и (2).

$$\begin{aligned} mx_1 - mx_0 &= \int_{t_0}^{t_1} X dt = J_x; \\ my_1 - my_0 &= \int_{t_0}^{t_1} Y dt = J_y; \\ mz_1 - mz_0 &= \int_{t_0}^{t_1} Z dt = J_z; \end{aligned} \quad (7)$$

если мгновенная сила (X, Y, Z) начала дѣйствовать въ моментъ t_0 , а кончила въ моментъ t_1 , $t_0 = 0$, гдѣ 0 безконечно малая; скорости со значкомъ 0 относятся къ моменту t_0 , а со значкомъ 1 къ моменту t_1 . Интегралы, стоящіе въ правыхъ частяхъ равенства (7), принимаютъ неопредѣленный видъ, такъ какъ подынтегральная функція обращается въ безконечность, а предѣлы безконечно близки, но по сдѣланному нами условію они конечны, слѣд.

$$(mv_1) - (mv_0) = (J),$$

гдѣ J конечно, что и подтверждаетъ сказанное выше.

Однако, перемѣститься за время дѣйствія мгновенной силы точка не успѣетъ. Чтобы убедиться въ этомъ, возьмемъ уравненія (7) для верхняго предѣла t , если $t < t_1$:

$$\begin{aligned} mx' - mx_0' &= \int_{t_0}^t X dt = J_x'; \\ my' - my_0' &= \int_{t_0}^t Y dt = J_y'; \\ mz' - mz_0' &= \int_{t_0}^t Z dt = J_z'; \end{aligned}$$

здѣсь J означаетъ импульсъ мгновенной силы за промежутокъ отъ t_0 до t . Интегрируя предыдущія равенства между предѣлами t_0 и $t_1 = t_0 + \theta$, получаемъ:

$$mx_1 - mx_0 - mx_0' \theta = \int_{t_0}^{t_0 + \theta} J_x' dt;$$

$$my_1 - my_0 - my_0' \theta = \int_{t_0}^{t_0 + \theta} J_y' dt;$$

$$mz_1 - mz_0 - mz_0' \theta = \int_{t_0}^{t_0 + \theta} J_z' dt.$$

Разсмотримъ первый изъ интеграловъ, стоящихъ въ правыхъ частяхъ: $\int_{t_0}^{t_0 + \theta} J_x' dt$. Мы можемъ по известной теоремѣ интегральнаго исчисленія дать ему видъ:

$$\int_{t_0}^{t_0 + \theta} J_x' dt \quad (\text{средн. знач. } J_x') = \int_{t_0}^{t_0 + \theta} dt \quad (\text{средн. знач. } J_x') \theta;$$

причемъ по условію среднее значеніе J_x' величина конечная. Тоже самое можемъ сказать и объ остальныхъ интегралахъ.

Полагая въ предѣлѣ θ равнымъ нулю, находимъ:

$$x_1 = x_0; \quad y_1 = y_0; \quad z_1 = z_0;$$

т. е. точка осталась на мѣстѣ.

Работа, совершенная мгновенною силою имѣетъ конечную величину, какъ это вытекаетъ изъ теоремы лорда Кельвина (6) и сдѣланнаго нами условія о величинѣ импульса.

Если одновременно съ мгновенною силою приложена къ матеріальной точкѣ и сила конечнаго напряженія, то импульсъ послѣдней за время дѣйствія мгновенной будетъ безконечно малъ, и слѣдъ въ предѣлѣ исчезаетъ. На самомъ дѣлѣ, пусть сила (X, Y, Z) конечна; тогда для импульса ея по оси OX имѣемъ выраженіе:

$$J_s = \int_t^{t_0 + \theta} \Xi dt \quad (\text{средн. знач. } \Xi) \cdot \theta,$$

что въ предѣлѣ обращается въ нуль. Сказанное справедливо и для импульсовъ по двумъ другимъ осямъ.

150. Ударъ матеріальной точки о связь. Положимъ, что матеріальная точка массы m подчинена неудерживающей связи:

$$F(x, y, z, t) \geq 0. \quad (8)$$

Пусть связь эта ослаблена (§ 118):

$$F(x, y, z, t) = 0$$

и точка движется, какъ свободная, сообразно съ такими уравненіями движенія:

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t). \quad (9)$$

Тогда можетъ случиться, что точка снова придетъ на связь, т. е. въ нѣкоторый моментъ t координаты ея обратятъ лѣвую часть выраженія (8) въ нуль. Условимся, что за начало времени взять нами какой либо моментъ изъ того промежутка времени, когда точка двигалась, какъ свободная; тогда моментъ t прихода точки на связь, очевидно, найдется, если мы опредѣлимъ наименьшій положительный корень уравненія

$$F[f_1(t), f_2(t), f_3(t), t] = 0. \quad (10)$$

Если такого корня не окажется, то, значить, во все свое дальнѣйшее движеніе точка никогда не встрѣтится со связью.

Но пусть корень τ найденъ; тогда въ моментъ τ точка придетъ въ положеніе:

$$x_0 = f_1(\tau); y_0 = f_2(\tau); z_0 = f_3(\tau),$$

лежащее на связи (8), со скоростью $v_0(x_0', y_0', z_0')$, если

$$v_0' = v_0 \cos(v_0, x) = f_1'(\tau); y_0 = f_2(\tau); z_0 = f_3'(\tau). \quad (11)$$

Но мы знаемъ (§ 121), что точка, находящаяся на неудерживающей связи (8), не можетъ имѣть произвольной скорости, а

должна подчиняться ограничению, выражаемому равенствомъ (17) § 121:

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad (12)$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

Примѣняя это неравенство къ моменту τ , находимъ, что скорости x_0, y_0, z_0 должны выполнять условіе:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\tau_0} x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\tau_0} y_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{\tau_0} z_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\tau_0} = 0 \quad (14)$$

или, короче,

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_{\tau_0} = 0. \quad (15)$$

Значекъ 0 показываетъ, что въ соответственной функціи вмѣсто x, y, z, x', y', z', t вставлены $x_0, y_0, z_0, x', y', z', \tau$.

Когда скорость точки m въ моментъ τ такова, что лѣвая часть выраженія (15) положительна, тогда (§ 121) точка m въ одинъ изъ слѣдующихъ моментовъ, смежныхъ съ τ , снова покинетъ связь.

Когда скорость точки m въ моментъ τ такова, что лѣвая часть выраженія (15) обращается въ нуль, тогда въ зависимости отъ величины и направленія ускоренія точка m или остается на связи, или сходится съ нея.

Но, если скорость v_0 точки m такова, что

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_0 < 0; \quad (16)$$

то, чтобы согласить это неравенство съ условіемъ (12), мы принимаемъ, что связь (8) оказываетъ мгновенную реакцію на точку и эта реакція измѣняетъ скорость v_0 въ некоторую другую $v_2(v_2, v_2', v_2'')$, удовлетворяющую условію (12): происходитъ такъ называемый ударъ точки о связь. При томъ, чтобы подвести возможно большее число наблюдаемыхъ явленій подъ нашу схему, мы принимаемъ, что въ общемъ случаѣ скорость v_2 удовлетворяетъ условію (12) со знакомъ неравенства.

Если для момента τ точка покидаетъ связь, то мы должны изслѣдовать въ томъ же отношеніи слѣдующій по величинѣ поло-

жизельный корень уравненія (10) и продолжать такимъ образомъ, пока не переберемъ всѣхъ корней или не дойдемъ до такого, при которомъ точка остается на связи или при которомъ происходитъ ударъ.

Итакъ, пусть для момента τ соблюдается неравенство (16). Такъ какъ мгновенная реакція связи отнесена нами къ разряду мгновенныхъ силъ, то по § 149 мы принимаемъ, что

I) время дѣйствія ея или продолжительность удара θ безконечно мала;

II) за время удара ни точка, ни поверхность (8) не успѣютъ измѣнить своего положенія.

III) за время удара импульсъ всякой конечной силы равенъ нулю.

Пусть ударъ кончается въ моментъ

$$\tau_2 = \tau + \theta;$$

тогда по условію въ общемъ случаѣ

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_2 = 0, \quad (17)$$

если

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_2, \quad (18)$$

Всѣ коэффициенты, какъ показываетъ значекъ 0, здѣсь постоянны.

Полагая, что во время удара скорость точки измѣняется сплошнымъ образомъ, мы изъ (16) и (17) заключаемъ, что для въ-котораго промежуточнаго момента τ , т. е. если

$$\tau = \tau_1 = \tau_2,$$

точка m приобретаетъ такую скорость $(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$, что для τ соблюдается равенство

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_1 = 0, \quad (19)$$

если

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_1, \quad (20)$$

Промежутокъ времени отъ момента τ до τ_1 назовемъ первымъ актомъ удара, а промежутокъ отъ τ_1 до τ_2 вторымъ

актомъ. Въ частномъ случаѣ ударъ можетъ ограничиваться только однимъ первымъ актомъ (ударъ неупругій).

Скорость v , съ которою точка приходитъ на связь, обыкновенно называется скоростью паденія точки, а скорость v_0 , съ которою точка покидаетъ связь, скоростью отраженія. Уголъ ϵ_0 съ отрицательнымъ направлениемъ нормали къ поверхности (8) носитъ названіе угла паденія, а уголъ ϵ_1 съ положительнымъ направлениемъ той же нормали носить названіе угла отраженія.

Мы принимаемъ, что и мгновенная реакція направлена по дифференціальному параметру перваго порядка или по положительной нормали къ поверхности (8), слѣд. косинусы угловъ ея съ осями пропорціональны

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0; \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0; \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0.$$

По условіямъ I и II эти величины во время удара постоянны, слѣд. по § 149 направленіе импульса совпадаетъ съ направлениемъ самой реакціи, т. е. идетъ также по положительной нормали.

Возьмемъ какой либо моментъ t между τ_1 и τ_2 ; пусть для него точка m имѣетъ скорость $v(x', y', z')$. Если импульсъ мгновенной реакціи за промежутокъ между моментами t_1 и t_2 условимся означить такъ

$$J_{t_1}^{t_2},$$

то по § 147 для момента t можемъ написать равенства

$$\begin{aligned} mx' - mx_0' &= J_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\Delta F_0} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0; \\ my' - my_0' &= J_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\Delta F_0} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0; \\ mz' - mz_0' &= J_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\Delta F_0} \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0; \end{aligned} \quad (21)$$

если $\Delta F_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0^2}.$

Въ этихъ уравненіяхъ мы приняли во вниманіе условіе III и пропустили потому импульсъ равнодѣйствующей конечныхъ

силъ, приложенныхъ къ точкѣ m Изъ написанныхъ уравненій непосредственно вытекаетъ

$$\frac{x' - x_0'}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0} = \frac{y' - y_0'}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0} = \frac{z' - z_0'}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}; \quad (22)$$

$$mu_2' - mu_1' = J_1 \frac{1}{\Delta F_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right); \quad (25)$$

$$mx_2' - mx_1' = J_2 \frac{1}{\Delta F_0} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0.$$

Задача объ ударѣ состоитъ въ опредѣленіи скорости отраженія по даннымъ τ , x_1 , u_1 , z_1 и скорости паденія.

Разсмотримъ сначала частный случай, а именно допустимъ, что ударъ неупругій, т. е. ограничивается однимъ первымъ актомъ. Тогда искомою будетъ скорость v . Для нахождения ея мы имѣемъ уравненія (23) и (19) — всего четыре уравненія для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ v , u_1 , z_1 и J_1 . Чтобы найти импульсъ J_1 , умножаемъ соотвѣтственно уравненія (23) на $\frac{1}{m} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)$, $\frac{1}{m} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)$, $\frac{1}{m} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)$ и складываемъ; тогда находимъ:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 x_1' + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 u_1' + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0 z_1' + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0' x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0' y_1 \\ & - \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0' z_1 = \frac{1}{m} J_1 \Delta F_0. \end{aligned}$$

Прибавляя и вычитая изъ лѣвой части $\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_1$, имѣемъ

$$\left(\frac{dF}{dt} \right)_1 - \left(\frac{dF}{dt} \right)_0 = \frac{1}{m} J_1 \Delta F_0,$$

откуда по (19) для J_1 получаемъ выраженіе:

$$J_1 = \frac{m}{\Delta F_0} \left(\frac{dF}{dt} \right)_1. \quad (26)$$

Подставляя это значеніе вмѣсто J_1 въ (23), непосредственно находимъ x_1' , u_1' , z_1' , что и рѣшаетъ задачу.

Для рѣшенія общаго случая надо обратиться или къ уравненіямъ (24) или къ группѣ уравненій (23), (25) и (19). Въ томъ и другомъ случаѣ легко видѣть, что число неизвѣстныхъ на единицу превышаетъ число уравненій: въ первомъ случаѣ неизвѣстныхъ 4: x_2 , u_1 , z_2 , J , а уравненій всего 3; во второмъ неизвѣстныхъ 8: x_1 , u_1 , z_1 , x_2 , u_2 , z_2 , J_1 , J_2 , а уравненій всего 7.

Если бы мы применяли къ опредѣленію J изъ (24) тотъ же приемъ, который далъ намъ выраженіе для J_1 , то нашли бы:

$$J = \frac{m}{\Delta F} \left(\frac{dF}{dt} \right)_2 - \left(\frac{dF}{dt} \right)_1, \quad (27)$$

гдѣ въ правую часть опять вошли бы неизвѣстныя x_2, y_2', z_2' . Вычитая (26) изъ (27) или непосредственно изъ уравненій (25), имѣемъ:

$$J_2 = \frac{m}{\Delta F_0} \left(\frac{dF}{dt} \right)_2. \quad (28)$$

Недостающее намъ восьмое уравненіе, связывающее неизвѣстныя, берется изъ опытовъ и наблюденій надъ тѣми явленіями, которая желательно подвести подъ разбираемую механическую схему. А именно Ньютонъ, измѣряя углы паденія и отраженія соударяющихся тѣлъ, пришелъ къ такому опытному закону: отношеніе импульса за второй актъ удара къ импульсу за первый актъ удара не зависитъ отъ скорости паденія, а только отъ состава соударяющихся тѣлъ; это отношеніе ε , называемое коэффициентомъ возстановленія, правильная положительная дробь

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Формулою положеніе Ньютона выразится такъ:

$$J_2 = \varepsilon J_1, \quad (29)$$

или по (26) и (28):

$$\left(\frac{dF}{dt} \right)_2 = \varepsilon \left(\frac{dF}{dt} \right)_1. \quad (30)$$

Чтобы дать себѣ отчетъ въ томъ, какимъ образомъ при помощи измѣренія угловъ паденія и отраженія можно найти отношеніе между J_2 и J_1 , остановимся на простѣйшемъ случаѣ, съ которымъ собственно и производились опыты, а именно, когда связь неподвижна.

$$\frac{\partial I}{\partial t} = 0. \quad (31)$$

Изъ (26) и (28) имѣемъ,

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{\left(\frac{dF}{dt} \right)_2}{\left(\frac{dF}{dt} \right)_1}.$$

Такъ какъ

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta F_0 \cos(\Delta F_0, x) = \Delta F_0 \cos(v_0, x); \dots;$$

$$x_2' = v_2 \cos(v_2, x); x_0' = v_0 \cos(v_0, x); \dots;$$

гдѣ n направленье положительной нормали къ (8), то при (81) по (14) и (18):

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_1 = \Delta F_0 \cdot v_2 \cos(v_2, n);$$

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_0 = \Delta F_0 \cdot v_0 \cos(v_0, n);$$

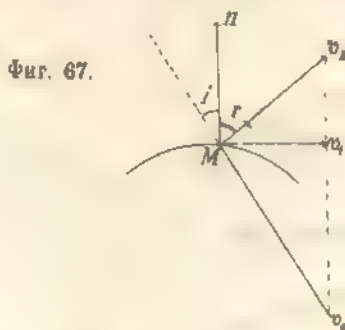
и слѣдовательно

$$\frac{J_2}{J_1} = -\frac{v_2 \cos(v_2, n)}{v_0 \cos(v_0, n)}. \quad (32)$$

Кромѣ того по (19):

$$v_1 \cos(v_1, n) = 0. \quad (33)$$

Пусть (Фиг. 67) M точка поверхности, въ которой происходитъ ударъ; Mr_0 скорость паденія, Mr_2 —скорость отраженія; углы i и r —углы паденія и отраженія; Mn положительная нормаль.



Тогда по (22) прямая $v_1 v_2$, параллельная Mn , представитъ собою годографъ скорости за время удара, и слѣд. по (33) векторъ Mr_1 изображаетъ собою скорость v_1 , если уголъ n Mr_1 прямой. Но

$$r_2 \cos(r_2, n) = v_1 v_2 = Mv_1 \cdot \cos r = v_1 \cdot \cos r;$$

$$v_0 \cos(v_0, n) = v_0 v_1 = Mr_1 \cdot \cos i = v_1 \cdot \cos i;$$

а потому изъ (32):

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{\cotg r}{\cotg i};$$

т. е. отношеніе между импульсами равно отношенію между котангенсами угловъ отраженія и паденія, что и желали показать.

Съ прибавленіемъ уравненія (29) или (30) къ уравненіямъ (24) или къ группѣ уравненій (23), (25) и (19) задача становится вполне опредѣленною. Найдя импульсъ J_1 (26) указаннымъ выше приѣмомъ, мы теперь по (29) имѣемъ:

$$J = J_1(1 - \varepsilon),$$

и слѣд. скорость отраженія найдется изъ уравненій (24):

$$\begin{aligned} m x_2' - m x_0' &= J_1(1 - \varepsilon) \Delta F_1 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0; \\ m y_2' - m y_0' &= J_1(1 - \varepsilon) \Delta F_1 \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0; \\ m z_2' - m z_0' &= J_1(1 + \varepsilon) \Delta F_0 \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0; \end{aligned} \quad (34)$$

гдѣ J_1 дается равенствомъ (26). Коэффициентъ возстановленія долженъ быть данъ намъ напередъ; если $\varepsilon = 0$, ударъ неупругій и второго акта вовсе нѣтъ; если $\varepsilon = 1$, ударъ называется вполне упругимъ.

Ньютонъ *) нашелъ, что при соудареніи стекла объ стекло $\varepsilon = \frac{15}{16}$, при соудареніи мячиковъ, набитыхъ шерстью, $\varepsilon = \frac{5}{9}$; при соудареніи желѣза объ желѣзо тоже почти $\frac{5}{9}$. Позднѣйшіе опыты подтвердили Ньютоновъ законъ (29).

Примѣръ: Точка массы 1 движется согласно съ уравненіями

$$x = \alpha t; y = \beta t; z = \gamma t;$$

гдѣ α, β, γ постоянныя, и подчинена неудерживающей связи.

$$F = R^2 - (x - kt)^2 - y^2 - z^2 \geq 0,$$

гдѣ R и k новыя постоянныя.

*) Thomson and Tait, Natural Philosophy sect. 300.

Для $t = 0$ точка не на связи, моментъ — прихода ея на связь найдемъ, рѣшая уравненіе:

$$R^2 = [(\alpha - k)^2 + \beta^2 + \gamma^2]r^2 = 0,$$

слѣдующею

$$r = \frac{R}{v},$$

гдѣ

$$v = \sqrt{(\alpha - k)^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Въ этотъ моментъ точка займетъ положеніе:

$$x_0 = \alpha r; \quad y_0 = \beta r; \quad z_0 = \gamma r;$$

а скорость паденія опредѣлится равенствами:

$$x_0' = \alpha; \quad y_0' = \beta; \quad z_0' = \gamma.$$

Дифференцируя уравненіе связи, находимъ, что

$$\left(\frac{dF}{dt} \right)_0 = -2v < 0;$$

слѣд. произойдетъ ударъ.

Вычисливъ ΔF_0 , находимъ,

$$\Delta F_0 = 2\delta\tau;$$

потому импульсъ J_1 за первый разъ удара по (26) будетъ

$$J_1 = \delta.$$

Если коэффициентъ восстановленія ε , то по (34) скорость отражено опредѣлится такъ:

$$x_2' = k - \varepsilon(\alpha - k); \quad y_2' = -\varepsilon\beta; \quad z_2' = -\varepsilon\gamma.$$

151. Измѣненіе живой силы матеріальной точки за время удара.
Предварительно замѣтимъ, что по предыдущему съ одной стороны

$$\left(\frac{dF}{dt} \right)_0 = \Delta F_0 v_0 \cos(v_0, n) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_0;$$

$$\left(\frac{dF}{dt} \right)_1 = 0 = \Delta F_0 v_1 \cos(v_1, n) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_0;$$

$$\left(\frac{dF}{dt} \right)_2 = \Delta F_0 v_2 \cos(v_2, n) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_1;$$

а съ другой стороны направление импульса совпадаетъ съ направлениемъ n . Примѣняемъ теперь теорему лорда Кельвина (§ 148) сначала къ промежутку времени между моментами τ и τ_1 , а затѣмъ между моментами τ_1 и τ_2 ; причѣмъ живую силу точки для моментовъ τ , τ_1 и τ_2 означимъ соответственно T , T_1 и T_2 . Тогда получимъ

$$T_2 - T = \frac{1}{2} J_1 [v_1 \cos(v_1, n) - v \cos(v, n)]$$

$$\frac{1}{2} \frac{J_1}{\Delta F_0} \left[\left(\frac{dF}{dt} \right)_0 - 2 \left(\frac{dF}{dt} \right)_1 \right];$$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} J_2 [v_2 \cos(v_2, n) + v_1 \cos(v_1, n)] =$$

$$\frac{1}{2} \frac{J_2}{\Delta F_1} \left[\left(\frac{dF}{dt} \right)_2 - 2 \left(\frac{dF}{dt} \right)_1 \right].$$

Когда связь неподвижна, т. е.

$$\frac{dF}{dt} = 0,$$

мы можемъ, пользуясь (26) и (28), переписать предыдущія равенства такъ:

$$T_1 - T = \frac{1}{2m} J_1^2; \quad T_2 - T_1 = \frac{1}{2m} J_2^2.$$

Отсюда заключаемъ, что тогда за первый актъ удара живая сила точки уменьшается, а за второй актъ увеличивается (кладывая полученные выше выражения, имѣемъ по (29)

$$T_2 - T_0 = - \frac{1}{2m} J_1^2 (1 - \epsilon^2);$$

слѣд., за оба акта удара, вообще говоря, живая сила точки уменьшается и только при вполне упругомъ ударѣ ($\epsilon = 1$) остается безъ перемѣны.

$$z = k^t m \tilde{z}$$

$$z = k^t m \tilde{z}$$





531

N/500

16th